

安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《高等数学 A (一)》期中试卷

(闭卷, 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

一、 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 有下列命题:

- ① $\{x_n\}$ 有界 $\Leftrightarrow \{x_n\}$ 收敛 ② $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$
 ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+2023} = a$ ④ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+2} = a$

则以上命题**正确**的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x}$ 是 ()

- A. 无穷小 B. 无穷大 C. 有界但不是无穷小 D. 无界但不是无穷大

3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2}{x+1} - ax - b) = 0$, 其中 a, b 为常数, 则 ()

- A. $a=1, b=1$ B. $a=1, b=-1$ C. $b=1, a=-1$ D. $b=-1, a=-1$

4. 若函数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{2}{x}$, 则 $x=0$ 是其 ()

- A. 连续点 B. 无穷间断点
C. 跳跃间断点 D. 可去间断点

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则下列命题**错误**的是 ()

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导 D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2022}{n+2021} \right)^n =$ _____

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{5}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$ _____

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 则 $f'(0) =$ _____

9. 设 $y(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+2023)$, 则 $dy|_{x=-1} =$ _____

10. 极坐标曲线 $r = e^\theta$ 在点 $(r, \theta) = (e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为 _____

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \frac{3}{n^2 + n + 3} \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$

12. 设 $a > 0, \sigma > 0, a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{\sigma}{a}), a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\sigma}{a_n}), n = 1, 2, \dots$, 讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性, 若收敛求出其极限

13. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{\ln(1 + \tan^2 x)}$

14. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 若有间断点则判别其类型

15. 设 $y = y(x)$ 是由 $xy + e^y = x + 1$ 确定的隐函数, 计算 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$

16. 已知 $f(x)$ 有任意阶导数, 且 $f'(x) = (f(x))^3$, 当 n 为正整数时, 计算 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 f 是定义在 R 上的函数, 且对任何 $x_1, x_2 \in R$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, 若 $f'(0) = 1$, 证明对任何 $x \in R$, 都有 $f'(x) = f(x)$

18. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b)$, 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = f(\xi + \frac{b-a}{2})$