

系数阵笔记 1.15

浩于长空, forever 豪 3

2023 年 7 月 13 日

Show that if $a, b, c, \geq 0, (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$
(Crux Problem No.1940 & Iran TST,1996)

摘要

有关三元齐次不等式的小讲堂的笔记,不会对高考或竞赛很有用……大家看心情看这里很多内容会很抽象很玄学,而且这个技术更像心法,未必能把自己的思考完全传达出来,能不能听懂全靠缘分,能保证的是 Iran96 这种简单的不等式以后遇到轻松解决。

$$\begin{aligned}
& (\sum ab)(\sum \frac{1}{(a+b)^2}) \geq \frac{9}{4} \\
& \Leftrightarrow 4(\sum xy)(\sum (b+c)^2(c+a)^2) \geq 9 \prod (x+y)^2 \\
& \Leftrightarrow 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sum \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \geq 9 \prod \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 8 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \geq 9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 10 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 13 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 13 & 24 & 13 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 13 & 24 & 13 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 13 & 24 & 13 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 13 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 13 & 24 & 13 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \geq 9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 10 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 10 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & -6 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 6 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -6 & -2 & -2 & -6 & -1 & 4 \\ & -1 & -2 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 4 & & & \\ & & & 4 & & & \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2abc \sum a(a-b)(a-c) + \sum ab(a-b)(a^3-b^3) + 3 \sum ab(a^2-b^2)^2 \geq 0 \\
& (\sum_{sym} a^5b - \sum_{sym} a^4b^2) + 3(\sum_{sym} a^5b - \sum_{sym} a^3b^3) + 2abc(3abc + \sum a^3 - \sum_{sym} a^2b) \geq 0 \\
& \sum bc(b-c)^2(4b^2+7bc+4c^2) + \frac{abc}{a+b+c} \sum (b-c)^2(2bc+(b+c-a)^2) \geq 0 \\
& \sum (b-c)^2((b+c-a)^2(7(a^2+bc)+9a(b+c))+16abc(b+c)) \geq 0
\end{aligned}$$

* 第一个式子可以直接由系数阵得出，详见35

后三个式子是《代数不等式》（陈计 季潮丞）中的。

目录

1 说明	1
1.1 笔记注意事项	1
1.1.1	1
1.1.2	1
1.1.3	1
1.1.4	1
1.2 做题	1
1.2.1 常用的方法	1
1.2.2 主要的思想	1
1.2.3 转化为配方	2
1.3 系数阵和 pqr	2
1.4 Calc (系数阵计算器) 使用说明	2
1.4.1 下载	2
1.4.2 输入	2
1.5 能配方的系数阵计算器	3
1.6	3
1.7 sostool	4
1.8 triples	4
2 二元系数组	5
2.1 杨辉三角	5
2.2 定义	5
2.3 二元系数组的运算性质	5
3 系数阵	6
3.1 定义	6
3.2 系数阵的运算	7
3.3 习题	11
3.4 习题答案	11
4 均值不等式	13
4.1 简单的均值不等式	13

5	两个结构	19
5.1	$(a - b)^{2n}$ 结构	19
5.2	“1...-1...-1...1” 结构	20
5.3	习题	20
5.4	习题答案	21
6	舒尔不等式	26
6.1	舒尔不等式	26
6.2	简单的舒尔不等式	27
6.3	舒尔不等式变形	29
6.4	舒尔不等式加强	32
6.5	习题	33
6.6	习题答案	34
7	配方	45
7.1	平方	45
7.2	因式分解	47
7.3	配方法引入	49
8	二次元	55
8.1	针对取等的定向配方	55
8.2	二次元	58
8.3	Vasile 不等式	61
8.4	三元四次配方定理 (苏州 褚小光)	62
8.5	伴随二次元	63
8.6	非负三元四次的通法	67
9	六芒星	70
9.1	六芒星	70
9.2	对称六芒星	71
9.3	偏七次六芒星	72
9.4	八次六芒星	73
9.5	七次六边形	74
9.6	习题	75

10 SOS	76
10.1 一般方法	76
10.2 例题	76
10.3 习题	80
11 其他	81
11.1 非齐次多项式	81
11.2 去根号	81
12 总习题	82
13 其它结构	83
13.1	83
13.2 积一型	84
13.3 六次无角对称	89
14 台风	92
14.1	92
14.2	92
14.3	93
14.4	93
14.5 困难的分式不等式	94
15 多取等	95
15.1 风车	95
15.2 $s(a^2-ab)$ 的倍数	96
16 一些问题	98
16.1	98
16.2	98
16.3	99
16.4 简单六次对称	101
16.5 容易伪证	102
16.6	102
16.7	103
16.8	104

16.9 九次稀疏对称	105
16.10 小风车	105
16.11 类似风车	106
16.12	107
16.13	107
16.14	108
16.15	108
16.16	109
16.17 十二次不等式	110
16.18 星都放过了	110
16.19 Vasile 取等	111
16.20 非对称不等式	111
16.21 89 不等式	112
16.22 33 不等式	112
16.23 jichen	114
16.24	114
16.25 复杂取等	115

1 说明

1.1 笔记注意事项

1.1.1

在此笔记中，大多数情况是默认 $a, b, c \geq 0$ 的，但也可能有例外，需要自己区分。

1.1.2

建议“练习”和“习题”部分不要先看答案，自己做一遍再对。

1.1.3

此笔记暂时开源于GitHub Overleaf，请不要商用或删除笔记来源等信息。

1.1.4

目前关于系数阵的资料主要有：

- (1) Even Chen 在 AoPS 上写的，称为 Chinese Dumbass Notation.
- (2) 本笔记，我们建议系数阵的英文名为 Triangle of Coefficient.

1.2 做题

1.2.1 常用的方法

我们意图配出 $F = P + Q + R + \dots$ 其中 P, Q, R 都是已知非负的结构，那么所谓提出一个 P 就是考察 $F - P$ ，对 $F - P$ 继续观察，减去已知非负之后，专注于剩下的问题，比如再发现 $F - P$ 可以提个 Q ，就继续考察 $F - P - Q$ ，当然，发现放过头了就返回上一步。当 a, b, c 为实数时可以讨论负数个数，做四次三元非负的。

1.2.2 主要的思想

配方法的一个主要想法就是从外往里剥，如果能不断把角上的正项妥善使用，没有放过头的话，问题就会变得越来越容易处理，毕竟随着角一个个变成 0，整个阵（指非零项点位构成的凸包）会越来越小。非负的必要条件是零点集凸包顶点均为正，也就是说我们拆取某个结构的时候可以理解成“用外面的正项打里面的负项”，拆下来之后外面的正项就一去不回了，不能回所以贵，这也是为什么常说要高度有效地利用外面的正项。

1.2.3 转化为配方

做完系数阵就可以把对应的单项式写出来，特别地，如果有对称性便只要写一部分，就写成配方的形式了，然后一行就解决了。当然，也可以把每步用的不等式还原成最常见的形式，然后来整理（假装没有配方），但这样过程肯定会长很多。

1.3 系数阵和 pqr

5 次及以下的三元齐次循环多项式，pqr 解决都很简单，因为三次方程有无实根可以简单地利用判别式。但是到了六次循环之后 pqr 难度会骤升，而系数阵面临次数提升不会有剧烈的难度提升，这一点读者可以慢慢体会。

1.4 Calc（系数阵计算器）使用说明

我们知道，三元轮换齐次不等式都有配方的证法，系数阵就是星神用来方便手动配方创造的一个工具，主要便于观察和计算。星神写的程序可以把一个式子快速的变成系数阵的形式，以减少我们低级计算的时间。

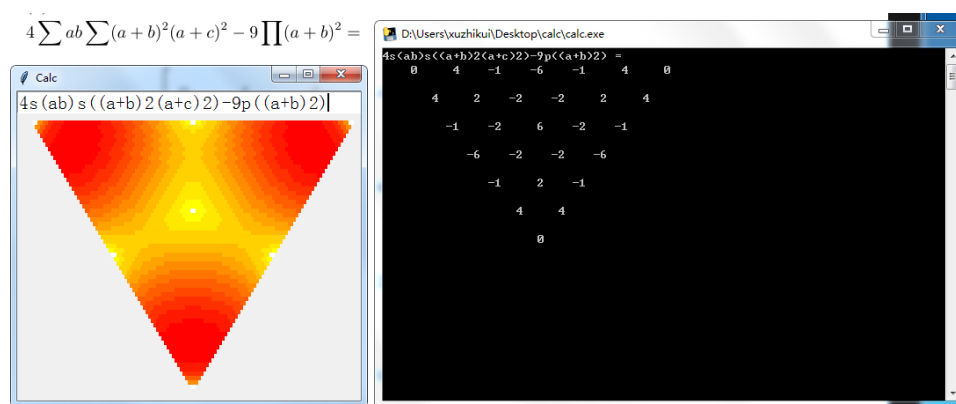
1.4.1 下载

（目前只有 windows 系统的版本）扫描二维码或[点击这里](#)进群，找到群文件“calc.rar”下载，解压之后运行 calc.exe（注：目前测试 win7 不能在 u 盘运行，且分辨率和次数没有 win10 高）



1.4.2 输入

左边的是输入窗口（颜色图是取值器），右边的是输出（配方器）（叫配方器居然不能自己配方:()）:



$s()$ 表示 sum 轮换和, $p()$ 表示 prod 轮换积

“前有数字后有字母”会补乘号, 如 “ $9/4ab$ ” 指 $\frac{9}{4}ab$, 为避免误解可以写成 “ $9ab/4$ ”
要注意的是只能输入齐次式, 否则无法运行。

一些情况下 $*$ 和 $^$ 可省略 ($^$ 前面是字母或者右括号的话 $^$ 可省)

```
update =
if left in '0123456789abc' and right in 'abc(sprt':
    update = '*'
elif left in 'abc' and right in '0123456789':
    update = '^'
result += left
```

那么再讲一下怎么取等 (或者找反例)

取值器的判定是在 $a + b + c = 60$ 的条件下算的值, 中心就是 $(a, b, c) = (20, 20, 20)$, 左上角顶点就是 $(a, b, c) = (60, 0, 0)$, 一般地, 到相应字母对边的距离就是其取值 (可以发现每边正好 60 个格子), 颜色则代表取值正负: 白色为 0, 红色为正, 蓝色为负。一般的, 没有蓝色则恒非负, 除非题目很 ex 导致 60 的精度不够, 但是有蓝色就说明一定不是恒非负的, 白色自然就是不等式的取等条件。

1.5 能配方的系数阵计算器

配方能力是有限制的, 而且只能配三元轮换、非负实数、有理系数的不等式。有时配出来系数会较丑陋。遇到难题或次数太高可能会失败, 不过足以解决本笔记里大部分题目。

1.6

有没有可能存在着直接判断一个系数阵是否大于零的粗暴办法呢?

拉乘, 吴消元法, 代数数运算, 逐次差分代换。

那么得到的方程必定可以消去两个元变成一元多项式方程, 这时候次数可能非常大, 没法求根

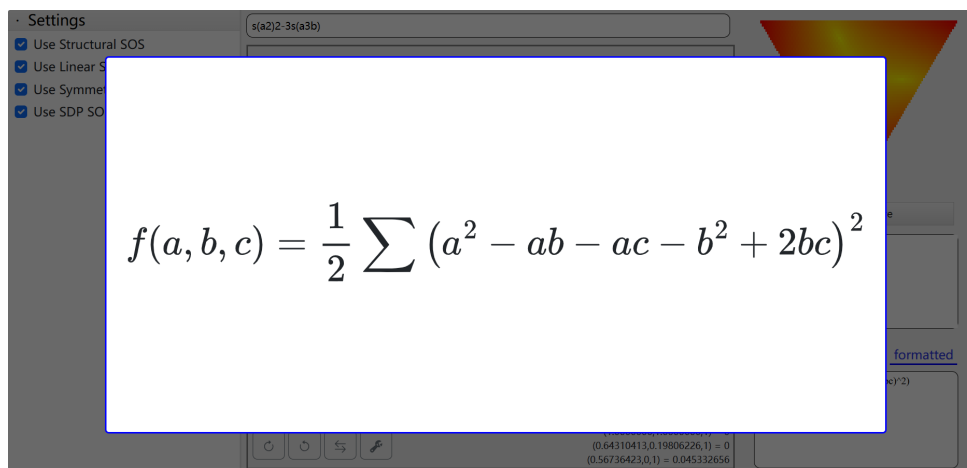
式解。但实际上我们是可以直接对“xxxxx 方程的根”作各种运算的，这个过程的感觉就比如得到“xxxx 方程的根”的平方等于“xxxxxxxxx 方程的根”，所以理论上我们可以表示出拉乘所得方程的所有解，只不过那时会是“a=xxxxxxxxxxxxx（一个超长的整系数方程）的解”这个样子。那么对这些可疑极值点回代计算即可，但你也该意识到这个过程有多离谱了，这确实是个通法，但不是一个好的判定方法。

1.7 sostool

配方器sostool 链接这个需要 matlab 环境支持。

1.8 triples

Forever 豪 3 的配方器开源于 triple-sos，相比 Calc 支持配方功能，但需要安装 Python。



2 二元系数组

2.1 杨辉三角

我们先从杨辉三角说起，姑且默认大家都知道杨辉三角。

2.2 定义

我们已经知道了杨辉三角，杨辉三角本身其实就暗示了“一排数字可以和一个二元齐次多项式相对应”。

比如 $[1]$ 对应 1 ， $[1, 1]$ 对应 $a + b$ ， $[1, 2, 1]$ 对应 $a^2 + 2ab + b^2 \dots \dots$ 依此类推，那么自然地

$$[1, 0, 2]_{a,b} = a^2 + 2b^2$$

于是我们作这样的记号，类似 $[1, 0, 2]$ 的叫做**二元系数组**。

2.3 二元系数组的运算性质

下面我们来观察感受一下系数组的运算性质：

其实大家学多项式乘法竖式的时候应该对这种运算方式有所了解，比如 $[1, 1] \times [1, 0, 0, 1] = [1, 1, 0, 1, 1]$ ，这其实可以利用乘法分配律，也就是 $[1, 1] \times [1, 0, 0, 1] = [1, 1] \times [1, 0, 0, 0] + [1, 1] \times [0, 0, 0, 1] = [1, 1, 0, 0, 0] + [0, 0, 0, 1, 1] = [1, 1, 0, 1, 1]$ ，考虑到他和多项式同构所以系数组可以有分配律，

再例如： $[1, 2, 3] \times [1, 0, 1] = [[1, 2, 3], 0, [1, 2, 3]] = [1, 2, 4, 2, 3]$ ，或者我们可以这么理解：

$$\begin{array}{r} 1 3 \\ 1 2 \\ \hline 1 2 2 \end{array}$$

$[1, 2, 3] \times [1, 2, 3] = [1 \times [1, 2, 3], 2 \times [1, 2, 3], 3 \times [1, 2, 3]] = [1, 4, 10, 12, 9]$ 或者

$$\begin{array}{r} 3 9 \\ 2 6 \\ 1 2 \\ \hline 1 4 12 \end{array}$$

可以发现，系数组（多项式）的乘法，和正整数竖式乘法的区别就是**系数组的运算不进位**。

3 系数阵

3.1 定义

把系数组变成三元的，就是系数阵，我们把下面这个东西叫做**三元系数阵**，如果这个东西第一行有 $n+1$ 个数，则称它是 n 阶的。和上面的二元情形类似，它和三元齐次式之间一一对应。左上角的数对应 a^n 系数，右上角对应 b^n 系数，下角对应 c^n 系数，三元齐次式写成这个样子的主要好处就是，使得我们不用写 a^3b^2c 之类的东西了，只需要书写系数，这会使得我们更加便于观察一个三元齐次式的结构。

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} \\ & x_{10} & x_{11} & \cdots & \ddots \\ & & x_{20} & \cdots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & x_{n0} \end{bmatrix}$$

或者把它倒过来，左下角对应 a^n 系数，右下角对应 b^n 系数，上角的数对应 c^n 系数。

$$\begin{bmatrix} & & & & x_{n0} \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & x_{20} & \cdots & \ddots & \ddots \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & \ddots & \ddots \\ x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} \end{bmatrix}$$

例如： $a + b + c =$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

$$a + 2b + 3c =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$$

$$a^3 + 2b^3 + 3a^2b + 4c^3 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$a^3b^2c =$$

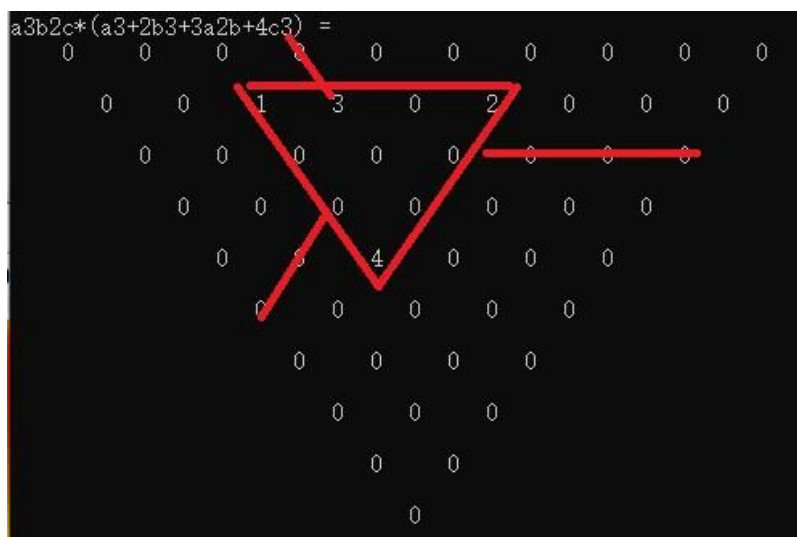
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

你会发现，这个“1”在 a 角的方向上距离边的距离是 3， bc 同理，每个数所处的坐标和指数向量是对应的，用的就是齐次坐标的规则。

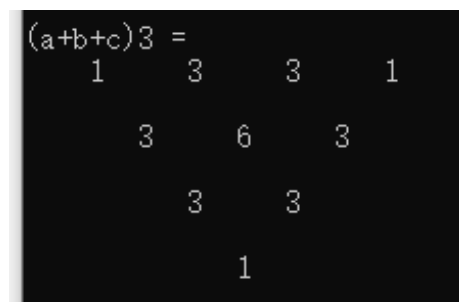
3.2 系数阵的运算

首先要知道的是一个系数阵乘一个单项系数阵的规律，比如系数阵 3 阶乘 3 阶结果是 6 阶。

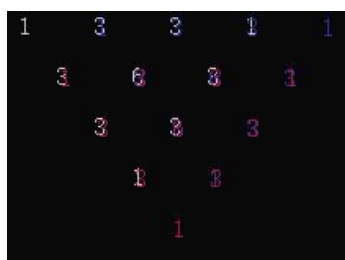
现在我们把上面两个阵相乘，大家应该能看出发生了什么



于是我们来看看这个写法对于三元齐次多项式的乘法带来了怎样一些便利，比方说，三元的杨辉三角现在 $(a+b+c)^3$ 已经有了，我们如何计算 $(a+b+c)^4$



类似二元系数组，我们可以想象把 $(a+b+c)^3$ 分别乘上 a, b, c 然后叠加起来，其实就是系数组的叠加原理拓展到三元了。

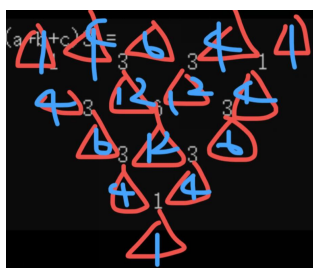


或者

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

补充的解释：你要想想一块披萨上面的料也全是披萨，前面我称为 $\triangle a$ 后面我称为 $\triangle b$ ，那么 $\triangle a \times \triangle b$ 的意思是，把 $\triangle b$ 看成一块披萨，每一个非 0 的地方都是料，而这块料是 $\triangle a$ 这个披萨。

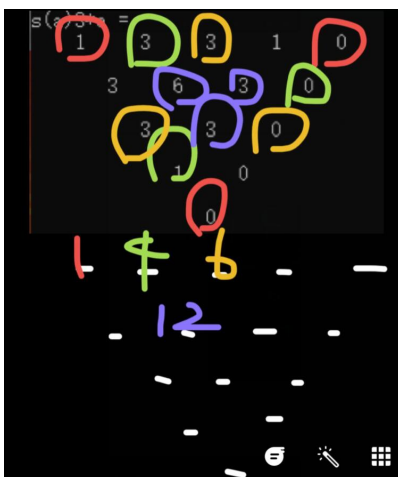
如果我们直接去思考“最后的这些数由何而来”，就可以这样算出来：



这也正是杨辉三角的思路在三元情形下的推广，由此我们可以看出，系数阵在“乘以 $(a+b+c)$ ”这个操作上是带来便利的，此外系数阵还有一个便利，在作轮换和的时候也带来方便。比如说我们把 $(a+b+c)^3(a+b+c)$ 视作 $\sum ((a+b+c)^3 a)$ ， $(a+b+c)^3 a$ 就是 a 角方向加一排 0，

$$\begin{array}{cccccc} (a+b+c)^3 a = & & & & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 \\ & & 3 & & 6 & & 3 & & 0 \\ & & & 3 & & 3 & & 0 \\ & & & & 1 & & 0 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

那么对这个式子作轮换和的话，如果知道结果是轮换的或轮换对称的，我们只需要关注一部分位置（旋转对称的位置）的系数就行，大体像下面这样，那么剩下的地方可以直接根据对称性直接写出来，意思就是不要把整个复制成三份叠起来，这样不好想象，而是去找每一项的来源，这样就可以从被乘的阵上直接读了，乘 $\sum a$ 、 $\sum ab$ 、 $\sum a^2$ 等都可以用这个技巧。这里体现了系数阵在轮换和操作上带来的便利。



此外以下系数阵不难背出来，记得注意一个多项式如果被 $a - b$ 整除的话每行总和都是 0

$$\prod(a-b) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \\ -1 & 1 & \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \prod(a+b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\prod(a+b)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 10 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\prod(a-b)^2$ 很有必要背出来，是个很强的结构：

$$\prod (a-b)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ & & 1 & 2 & -6 & 2 & 1 \\ & & & -2 & 2 & 2 & -2 \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 习题

- (1) 用系数阵计算 $(a+b)^2 \cdot (a+c)^2$, 观察结果形式的特点
- (2) 如何用系数阵计算 $P(a,b,c) \times (ab+ac+bc)$, 当然 $P(a,b,c)$ 齐次
- (3) 如何用系数阵计算轮换对称和
- (4) 用系数阵方法将 Iran96 不等式通分

3.4 习题答案

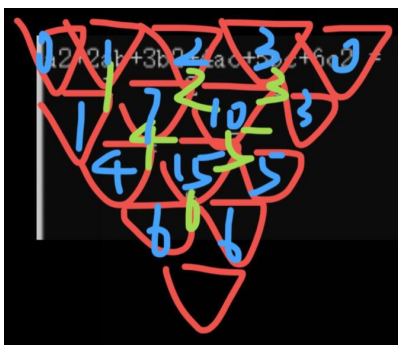
$$(1)(a+b)^2 \cdot (a+c)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 4 & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$f(a,b)g(b,c)$ 的形状是一个平行四边形, 且每行都是 $f(a,b)$ 的若干倍。

(2) 乘 $(ab + ac + bc)$ 和乘 $(a + b + c)$ 差不多，比如要计算 $a^2 + 2ab + 3b^2 + 4ac + 5bc + 6c^2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 6 \end{bmatrix}$$

这个东西乘 $(ab + ac + bc)$ 的话，可以在心里画这样一些倒三角求和，蓝色的就是积了。



(3) 略

(4) 见2

4 均值不等式

这里我们只探讨【对于若干系数为 1 的单项式使用 AM-GM 不等式】的特点。

4.1 简单的均值不等式

我们先观察几个例子，首先对于 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，即 $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ 我们已经知道，
 $a^2 + b^2 - 2ab =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$a^2 + c^2 - 2ac$ 的话就是转一下

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & -2 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

那在找个次数高点的例子， $a^4 + b^2c^2 - 2a^2bc =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

到这里其形状的规律已经很明显了，就是“**两个 1 以及其中点处的 -2**”非负，实际上根据系数阵的定义很容易验证这一点。

(顺便补充：如果 ab 质心不在 x 上，类似 $[a, x, 0, b]$ ，那就是 $\frac{a}{2}x^3 + \frac{a}{2}x^3 + b$ 均一下)

那么再看看三元的情形：

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

其证明可以用常用恒等式：

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

顺便可以再分解为 $(a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$ (其中 $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}}$) (和系数阵更没有关系了)

也可以用 sos 证明，后面讲到 sos 会有

$$a^2b + b^2c + c^2a - 3abc =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \\ 1 & 0 & & \\ & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$a^2b + ab^2 + c^3 - 3abc =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

我们发现，其形态就是“三个 1 以及其重心处的 -3 ”，同理 n 元的情况也是如此，应当是“ n 个 1 以及其重心处的 $-n$ ”。

事实上，这些 1 可以有部分重合的，比如：

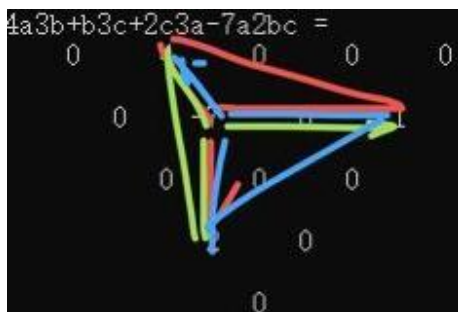
换言之也就是：注意到 $\sum a^3b - \sum a^2bc = \sum bc(a-b)^2 \geq 0$ 故得证。

那么再看一个比较通用的法二：

$\square a^3b + \square b^3c + \square c^3a \geq \square a^2bc$ 我们不难想象可以通过均值凑出这样的局部，而且我们可以用待定系数法解出来，实际上这个系数是 4,1,2，即：

注意到 $\sum a^3b - \sum a^2bc = \frac{1}{21} \sum (4a^3b + b^3c + 2c^3a - 7a^2bc) \geq 0$ 故得证。

那么接下来介绍一下在系数阵里如何快速地凑出这三个数，假定我们还不知道它应该是 4,1,2。设之为 p, q, r ，中间那个自然得是 $-(p+q+r)$ ，我们要保证的是处于 a^3b 及其轮换位置上的、质量 p, q, r 的三个质点其质心在 a^2bc 的位置上。这其实就是**奔驰定理**（或**拉密定理**）。



也就是说这三个系数之比应当等于这三块的面积比，不妨绿色那块面积是 1，于是显见红色是 2，蓝色是 4，这样就直接凑出来了。

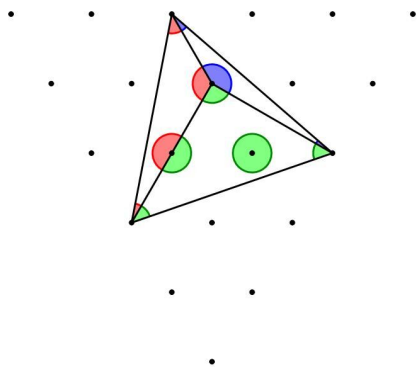
$$4a^3b + b^3c + 2c^3a - 7a^2bc = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -7 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

这里建议熟悉 $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ 。事实上，此处也可结合**皮克定理**，数“有多少个 180° ”，面积比等于度数比，（这仅限格点定点的多边形）。如下面这个例子：

例 2 $\sum a^3b^2 \geq \sum a^2b^2c$

解 2 其局部为 $4a^3b^2 + 2b^3c^2 + c^3a^2 \geq 7a^2b^2c$,

当然也可拆成三组 $[1, -2, 1]$ ，即 $\sum a^3b^2 - \sum a^2b^2c = \sum bc^2(a-b)^2 \geq 0$



练习 2 $\sum a^5 b^2 \geq \sum a^3 b^3 c$

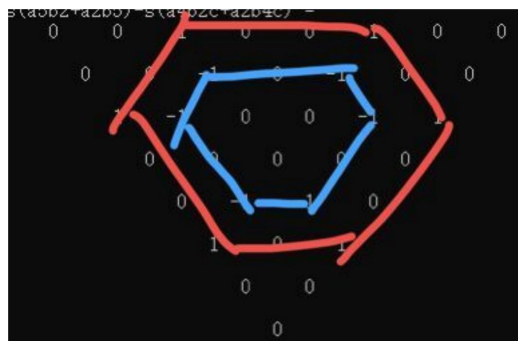
答案 2 $\sum a^5 b^2 - \sum a^3 b^3 c =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其局部为 $11a^5 b^2 + 7b^5 c^2 + c^5 a^2 \geq 19a^3 b^3 c$

于是其实我们已经暗中得到了一个结论：如果三个 1 和三个 -1 构成的正三角形共中心，且 1 的套住 -1 的，那么这个非负性成立，证明的话直接根据奔驰定理或皮克定理给出三个均值局部即可。以上说的都是观察手段，当然不要在解答过程里这样推理。现在这个结论在系数阵中可以当作一个结构，不用再去单独证明了！

米尔黑德定理就和它类似，如果一个轮换对称六边形套住另一个，那么非负性成立，例如：



以上两个结论（正三角形的、“轮换对称六边形”的）事实上暗示了一个道理：靠外的项更贵，靠内的项更贱，就是说在外面的项可以轻易地大过里面的，因此靠外的负项应当小心处理、优先处理，靠外的正项应该尽可能有效利用。

5 两个结构

5.1 $(a-b)^{2n}$ 结构

如 $(a-b)^4$ 、 $(a-b)^6$ 这类，在分拆中使用这样的结构可以更有效地利用靠外的正项，比如我们对比一下，如果是用 $(a-b)^4$ ，得到的就是这样 $(a-b)^4 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

可以理解为拿 1 个 a^4 、1 个 b^4 、6 个 a^2b^2 解决了 4 个 a^3b 和 4 个 ab^3 ，但如果是用均值做类似的事 $(a-b)^2(a^2+b^2) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

就变成拿 1 个 a^4 、1 个 b^4 、2 个 a^2b^2 解决了 2 个 a^3b 和 2 个 ab^3 如果带着靠外项更贵的心态来看，显然上面的性价比更高，况且实际上它们作差就是 $2ab(a-b)^2$ ，所以显然 $(a-b)^4$ 更紧一些，这里应当感受的是 n 为不小于 2 的正整数时 $(a-b)^{2n}$ 比均值紧很多，而且 n 越大越紧。这只是考虑用 a^4 、 b^4 、 a^2b^2 去攻击 a^3b 和 ab^3 那就近的话自然就是这两组均值。

5.2 “1...-1...-1...1” 结构

观察 $(a^3 - b^3)(a^4 - b^4)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

我们知道 $(a^m - b^m)(a^n - b^n)$ 是非负的，其证明只需分 $a \geq b$ 和 $a < b$ 两种情况讨论。

那么它在系数阵中的形状为对称的“1...-1...-1...1”，规律就是“ m, n 的值对应其中一个“-1”到两边的距离”。

例如，上面米尔黑德定理的例子其实也是 $\sum c^2(a - b)(a^4 - b^4)$ 。

5.3 习题

* 这些习题并不是都能用这节讲到的方法解决，对于搞不定的可以思考能如何投机取巧

- (1) $\sum a^2 \geq \sum ab$
- (2) $\sum a^3 \geq \sum a^2b$
- (3) $\sum a^3b \geq \sum a^2bc$
- (4) $\sum a^5 + 2 \sum a^2b^2c \geq 3 \sum a^3bc$
- (5) $\sum a^4 + 3 \sum a^2b^2 \geq 2 \sum ab(a^2 + b^2)$
- (6) $\sum a^5 + 5 \sum a^3b^2 \geq 6 \sum a^3bc$
- (7) $\sum a^5 + 3 \sum a^2b^2c \geq 4 \sum a^3bc$
- (8) $\sum a^5 + 8 \sum a^3b^2 \geq 9 \sum a^3bc$

$$(9) \frac{\sum a^2 \sum a^3}{3abc} \geq 4 \sum a^2 - 3 \sum ab$$

$$(10) \sum a^5 + 10 \sum a^3 b^2 \geq 11 \sum a^3 bc$$

5.4 习题答案

(1) $\frac{1}{2} \sum (a-b)^2$

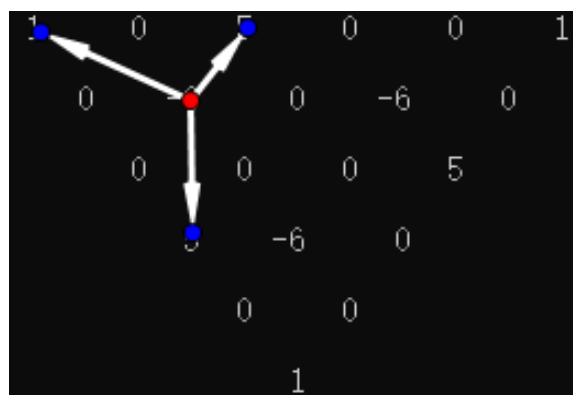
(2) aab 配

(3) 略

(4) 略

(5) $(a-b)^2(a-c)^2$, 同时它也等于 $\frac{1}{2} \sum (a-b)^4$ 其实这个更容易想到, 因为看系数阵的话只有外边一圈, 容易想到是不是能分成三条边处理

(6) 恰好就是三个均值, 这里可以利用面积配系数, 很明显张成的三块面积 1:2:3



(7) 可以发现它是 (4) 的加强, 而 (4) 我们是拆成三个均值完成的, 可见相同的方法将失效, 把这样几个平方相乘的话强度会增加, 可见 $\sum a(a-b)^2(a-c)^2$ 会是一个比较强的结构,

实际上拆下这个 $\sum a(a-b)^2(a-c)^2$ 之后剩这些:

$$\sum (a^5 + 3a^2 b^2 c - 4a^3 bc) - \sum a(a-b)^2(a-c)^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ & 2 & -8 & 6 & -8 & 2 \\ & & -1 & 6 & 6 & -1 \\ & & & -1 & -8 & -1 \\ & & & & 2 & 2 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

实际上和 $(a-b)^2(a-c)^2$ 的强度差不多，所以如果不是形状特别适合 $(a-b)^2(a-c)^2$ 的话一般先从 $(a-b)^{2n}$ 这个东西试起，如此一来计算量会小一些，说回这个，中间那几个 -8 和 $+6$

$$\begin{aligned} & s(a^5 + 3a^2b^2c - 4a^3bc) - s(a(a-b)^2(a-c)^2) = \\ & \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ & 2 & -8 & 6 & -8 & 2 \\ & & -1 & 6 & 6 & -1 \\ & & & -1 & -8 & -1 \\ & & & & 2 & 2 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

正好便于我们拆 $\sum c(a-b)^4$ 出来，毕竟 $c(a-b)^4$ 正好是 $[1, -4, 6, -4, 1]$ ，然后就剩：

$$\sum (a^5 + 3a^2b^2c - 4a^3bc) - \sum a(a-b)^2(a-c)^2 - \sum c(a-b)^4 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\sum ab(a-b)(a^2-b^2)$ 搞定。

那么再说说另一种做法 $\sum (a^5 + 3a^2b^2c - 4a^3bc) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -4 & 3 & -4 & 0 \\ & & 0 & 3 & 3 & 0 \\ & & & 0 & -4 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

从一开始就考虑靠 $(a-b)^4$ 来发挥里面的 3, 当然, 因为只有 3 所以拿半个, 也就是 $\frac{1}{2} \sum c(a-b)^4$, 于是中间全没了, 剩这个:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

也就是 $\frac{1}{2} \sum (a-b)(a^4-b^4)$ 也结束了

(8) 是 (6) 的加强, 我们可以考虑用 $(a-b)^4$ 来消耗最外面的 a^5 , 那比方说我们尝试 $\sum a(a-b)^4$ 会导致变成这样:

$$\sum (a^5 + 8a^3b^2 - 9a^3bc) - \sum a(a-b)^4 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ & -1 & -9 & 0 & -9 & 4 \\ & & 4 & 0 & 0 & 2 \\ & & & 2 & -9 & 4 \\ & & & & 4 & -1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

这个 -1 脱离了正项的凸包，意味着放过头了，这肯定不行了，因此吸取教训（只是演示一下可能的错误）。拆 $\frac{1}{2} \sum (a+b)(a-b)^4$ ，这样的话一方面不会出现上面这样的翻车。

$$\begin{array}{cccccc} s(a^5+8a^3b^2-9a^3bc)-s((a+b)(a-b)^4)/2 = & & & & & \\ 0 & 3/2 & 7 & -1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 9 & 0 & 9 & 3/2 & \\ & -1 & 0 & 0 & 7 & \\ & 7 & -9 & -1 & & \\ & 3/2 & 3/2 & & & \\ & & 0 & & & \end{array}$$

另一方面 a^4b 和 ab^4 上系数相等了，便于我们再去拿 $c(a-b)^4$ ，后面计算不说了，顺便我们知

道

$$\frac{1}{5} \sum (4a+b)(a-b)^4 \text{ 是整系数的}$$

$$\frac{1}{5} \sum (3a+2b)(a-b)^4$$

$$\frac{1}{5} \sum (2a+3b)(a-b)^4$$

$$\frac{1}{5} \sum (a+4b)(a-b)^4$$

甚至这几个都是整系数的。以至于可以搞出 $\sum (a^5 + 8a^3b^2 - 9a^3bc) - \sum \frac{1}{5}(3a+2b+5c)(a-b)^4 =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & -6 & -1 & 1 \\ & & 0 & -6 & -6 & 6 \\ & & & 6 & -1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(8) 略

(9) 略

(10) 略

6 舒尔不等式

6.1 舒尔不等式

$$a, b, c \geq 0, t \in \mathbb{R} \implies a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-c)(b-a) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

当且仅当 $a = b = c$, 或其中两个数相等而另外一个为零时, 等号成立。特别地, 当 t 为非负偶数时, 此不等式对任意实数 a, b, c 成立。

证明: 由对称性, 不妨设 $a \geq b \geq c$, 则 $a^t - b^t + c^t \geq 0$

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-c)(b-a) + c^t(c-a)(c-b) = a^t(a-b)^2 + (a-b)(a-c)(a^t - b^t + c^t) + c^t(b-c)^2 \geq 0$$

核心思想就是, 把 $a - c$ 这个大数, 拆成 $a - b$ 和 $b - c$ 充分利用其非负性

我们还要知道像这样的都是 Schur:

$$\sum a^m(a^n - b^n)(a^n - c^n), \sum b^m c^m(a^n - b^n)(a^n - c^n)$$

当 t 取 0 时, 即 $\sum a^2 \geq \sum ab$, 即均值不等式。

更多内容请自行查阅资料, 百度: 舒尔不等式

定理 利用 Schur 不等式可证所有三元三次对称不等式。

证明: (平行线 龚固) 假设 $f(x, y, z) = A \sum x^3 + B \sum (x^2 y + x y^2) + C x y z \geq 0$ 对于 $x, y, z \geq 0$ 成立。那么 $f(1, 1, 1) \geq 0, f(1, 1, 0) \geq 0, f(1, 0, 0) \geq 0$ 分别推出 $3A + 6B + C \geq 0, A + B \geq 0, A \geq 0$ 。于是,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\geq A \sum x^3 + B \sum (x^2 y + x y^2) - (3A + 6B) x y z \\ &= A(x^3 + y^3 + z^3 - 3x y z) + B(x^2 y + x y^2 + y^2 z + y z^2 + z^2 x + x z^2 - 6x y z) \\ &\geq A(x^3 + y^3 + z^3 - 3x y z) - A(x^2 y + x y^2 + y^2 z + y z^2 + z^2 x + x z^2 - 6x y z) \\ &= A \sum x(x - y)(x - z) \end{aligned}$$

6.2 简单的舒尔不等式

我们探索到这个阶段，很容易想到一个简单的问题，齐三次的，轮换对称的问题有没有通用的配方办法。考虑到必须有 $F(a, b, 0) \geq 0$ ，我们容易发现“最强”的问题就是

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ & -1 & 3 & -1 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

这时候我们便要聚焦这个问题，容易发现它是没法靠均值解决的（不升次数的话）。

我们知道这个东西叫做舒尔不等式，考虑到它在系数阵里的形状相当有特点，我们便将其引入配方技术之中，毕竟它便于使用，承认这是配方法的一部分就省去了将它特地配方的多余操作。

Schur 在系数阵视角下形状独特，比如

三次的像这样 $\sum a(a-b)(a-c) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ & -1 & 3 & -1 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

四次的像这样 $\sum a^2(a-b)(a-c) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ & -1 & 1 & 1 & -1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & -1 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

五次的像这样 $\sum a^3(a-b)(a-c) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & -1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

这里规律已经很明显了。再顺便偏个题，Schur 的一个有趣配方，如果将三次的 Schur 乘上 $(a+b)(a+c)(b+c)$ 你会惊讶地发现，乘出来的非零项比 Schur 本身还少：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2 & 0 & 0 & -2 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

结果是这个，不过这个就不要追问为什么了，偶然发现的，高次舒尔就没找到类似的恒等式了。

6.3 舒尔不等式变形

我们发现，只要是三个“对称”（转 120 度）的有 60 度顶角的菱形就是 Schur，且 60 度顶角上是 1，120 度顶角上是 -1 。那么再来说怎么转化，这种舒尔其实可以先从一个局部（其中一个菱形）下手，然后再用轮换和。

如, $\sum b^2 c^2 (a-b)(a-c) = a^2 b^2 c^2 \sum a^{-2} (a-b)(a-c) = \sum ab(ab-bc)(ab-ca) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ & & & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

并且, 指数向量作仿射变换的话系数阵也作对应的仿射变换, 比如

$\sum ab^2(ab^2 - bc^2)(ab^2 - ca^2)$ 是对 ab^2, bc^2, ca^2 的舒尔:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

不过其作为一个九次的结构强度极低。

实际上, 菱形“1”的顶角可以小于 60 度, 就是一个 Schur 加上“1...-1...-1...1”。

例 3 证明下式 ≥ 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & -2 & 1 & 1 & -2 \\ & & & & 0 & -2 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

解 3 拿一个 $(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$ 出来, 提完会是这样,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ & & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ & & & 0 & -1 & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

那么 ab 边上的 $1, -1, 0, -1, 1$ 暗示了 *Schur*:

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 + \sum ab \cdot \sum a^2(a-b)(a-c) + abc \sum a(a-b)(a-c) \geq 0$$

重点是那三个菱形, 其它的是 0.

$$s(a^5b+ab^5-2a^3b^3-2a^4bc+a^3b^2c+a^2b^3c)-p(a-b)^2 =$$

于是这里就会考虑这个了, 这是 $ab\text{Schur}_4$, 那么对称的也扣掉, 就是 $\sum ab \cdot \text{Schur}_4$, 这样一来最外面一圈就都没了, 实际上里面刚好剩下一个三次的 Schur , 那就好了, 也就是上面那样。

6.4 舒尔不等式加强

(这一节比较冷门, 建议先往后学配方.)

定义 定义欧拉分式 $E_n(a, b, c)$ ($n \in \mathbb{N}$) 为如下恒等式:

$$E_n(a, b, c) = \sum \frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)} = \sum_{\substack{x+y+z=n \\ x, y, z \in \mathbb{N}}} a^x b^y c^z.$$

也就是说, 左边虽然看起来是分式, 但实际上是个多项式! 如果知道留数定理, 还可以看出

$$E_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z^{n+2}}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz \quad (R > |a|, |b|, |c|).$$

注: 无歧义的情况下将简写 $E_n = E_n(a, b, c)$. 另外, 可补充定义 $E_{-1} \equiv 0$, $E_{-2} \equiv 0$.

定理 星给出恒等式:

$$\sum a^n(a-b)(a-c) \sum (a^2b^2 - a^2bc) = \sum a^n bc(a-b)^2(a-c)^2 + \prod (a-b)^2 E_n$$

该恒等式的一个直接推论是

$$\sum a^n(a-b)(a-c) \sum (a^2b^2 - a^2bc) \geq \prod (a-b)^2 \sum_{\substack{x+y+z=n \\ x, y, z \in \mathbb{N}}} a^x b^y c^z \geq 0.$$

例 4 证明六次舒尔的加强: $\sum a^4(a-b)(a-c) - 5 \prod (a-b)^2 \geq 0$.

解 4 根据定理, $\sum a^4(a-b)(a-c) \sum (a^2b^2 - a^2bc) \geq \prod(a-b)^2 \sum (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + a^2bc)$, 只需证

$$\sum (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + a^2bc) \geq 5 \sum (a^2b^2 - a^2bc)$$

后略。

虽然原题非常紧, 但是升次后除以 $\prod(a-b)^2$ 后就变得很弱了。更一般地有: 若齐次多项式 f 与 g 均关于 b, c 对称, 则如下的 $R(a, b, c)$ 是 $\prod(a-b)^2$ 的倍数。

$$R = \sum f(a, b, c)(a-b)(a-c) \sum g(a, b, c)(a-b)(a-c) - \sum f(a, b, c)g(a, b, c)(a-b)^2(a-c)^2$$

上面的公式是 $f(a, b, c) = a^n, g(a, b, c) = bc$ 的情况。

6.5 习题

- (1) $2 \sum a^3 + 3abc \geq 3 \sum a^2b$
- (2) $2 \sum a^4 + \sum a^2bc \geq 3 \sum a^2b^2$
- (3) $\sum \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4 \sum ab}$
- (4) $\sum a^6 + 3a^2b^2c^2 \geq 2 \sum a^3b^3$
- (5) $\sum a^5 + \sum a^2b^2c \geq \sum a^2b^2(a+b)$
- (6) $\sum \frac{a^2b^2}{c} + \sum a^3 + 6abc \geq 2 \sum ab(a+b)$
- (7) $4 \sum a^5 + 2 \sum a^2b^2c \geq 3 \sum ab(a^3 + b^3)$
- (8) $\sum a^5 + 2 \sum a^2b^2c \geq \sum a^3(b^2 + bc + c^2)$
- (9) $\sum a^5 + 6 \sum a^2b^2c \geq 7 \sum a^3bc$
- (10) $21abc + \sum \frac{a^5}{bc} \geq 4 \sum ab(a+b)$

$$(11) \sum a^5(a-b)(a-c) - 3 \sum a \prod(a-b)^2 \geq 0$$

$$(12) \sum a^2b^2 \sum (a^4 - a^2b^2) \geq \left(\sum a \right)^2 \prod(a-b)^2$$

6.6 习题答案

(1)

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ & 0 & 3 & -3 \\ & & -3 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

仅仅用简单均值不可能利用上中间的 3，所以提出一个 Schur，变成三个 $[1, -2, 1]$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & -2 \\ & & -2 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

即 $\sum a(a-b)(a-c) + \sum a^2(a-b) \geq 0$

(2)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & -3 & 1 & -3 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

一样的道理，要把中间三个 1 用上，所以拿一份 Schur，然后也是只需均值

$$\sum (2a^4 + a^2bc - 3a^2b^2) - \sum a^2(a-b)(b-c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & -3 & 0 & -3 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } \sum a^2(a-b)(a-c) + \sum a^4 + \sum (a^3b + ab^3) \geq \sum a^2(a-b)(a-c) + 3 \sum a^2b^2$$

(3) 是 Iran96，化整后变成这样一个六次的问题2

$$4 \sum ab \sum (a+b)^2(a+c)^2 - 9 \prod (a+b)^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & -6 & -1 & 4 & 0 \\ & 4 & 2 & -2 & -2 & 2 & 4 \\ & & -1 & -2 & 6 & -2 & -1 \\ & & & -6 & -2 & -2 & -6 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & 4 & 4 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

首先我们观察到第一行总和为 0，即 $F(1,1,0) = 0$ ，即 $a = b$ 且 $c = 0$ 时取等

然后再一看，中间就是一个 Schur 的两倍，故这样分成四块分别解决即可：

$$4 \sum ab \sum (a+b)^2(a+c)^2 - 9 \prod (a+b)^2 =$$

$$2abc \sum a(a-b)(a-c) + \sum ab(a-b)(a^3-b^3) + 3 \sum ab(a^2-b^2)^2 \geq 0$$

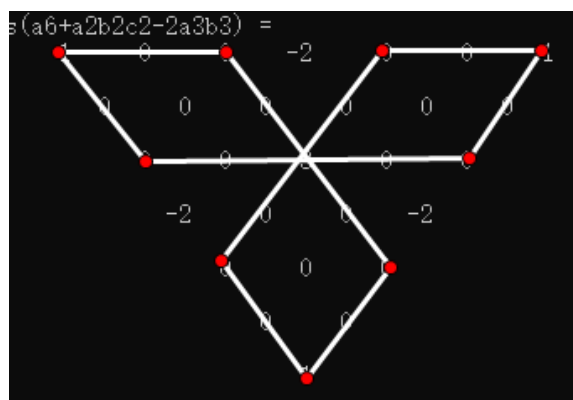
其推广如下AoPS 链接 2:

$$\sum \frac{1}{(ka+b)^2} \geq \frac{9}{(1+k)^2(ab+bc+ca)}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

还是一样的道理，关键在于如何利用中间的 3，那么自然地想到这样的 Schur，也就是减掉 $\sum a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)$



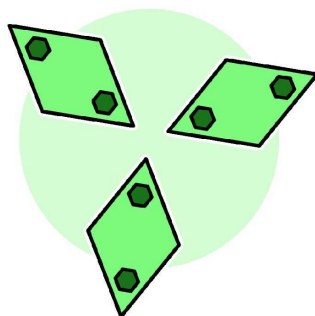
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取出之后剩下三个 $[1, -2, 1]$ 结束

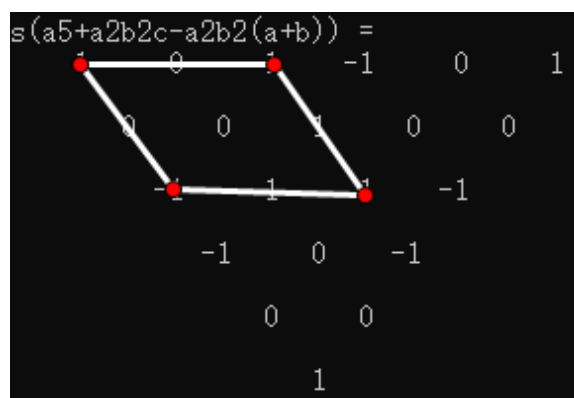
$$\text{即 } \sum a^6 + 3a^2b^2c^2 - 2\sum a^3b^3 = \sum a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + \sum a^2b^2(a - b)^2 \geq 0$$

注: $\sum a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) \geq \left(\sum a(a - b)(a - c)\right)^2$ 对于非负实数总成立, 这表明后面更严一点, 所以放过的时候可以试试后者。本题如果改为先取出 $\left(\sum a(a - b)(a - c)\right)^2$, 则可以用 2abSchur4 消去 a^5b , 剩下的是 $3\prod(a - b)^2$:

$$\sum a^6 + 3a^2b^2c^2 - 2\sum a^3b^3 = \left(\sum a(a - b)(a - c)\right)^2 + 2\sum ab \sum a^2(a - b)(a - c) + 3\prod(a - b)^2$$



(5)



这是一个舒尔 $\sum a(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)$ ，一共有三个。可以看出即使是像这样的变形，Schur 在系数阵里依然保持原本的形状规律，这里 a, b, c 取作 a^2, b^2, c^2 ， t 取 $\frac{1}{2}$ 即

$$\sum a^5 + \sum a^2 b^2 c - \sum a^2 b^2 (a + b) = \sum a(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) \geq 0$$

当然也是 $\sum a^3(a - b)(a - c) + \sum a^2(b + c)(a - b)(a - c) + \sum abc(a - b)(a - c)$

(6)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ & & 0 & -2 & 6 & -2 & 0 \\ & & & 1 & -2 & -2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

这就是两个 Schur 重叠，倒的那个是 $\sum b^2 c^2 (a-b)(a-c)$ 也可以理解为 Schur 定理 $t = -2$:

$$\sum b^2 c^2 (a-b)(a-c) = a^2 b^2 c^2 \sum a^{-2} (a-b)(a-c)$$

$$\text{理解为换元也是可以的: } \sum b^2 c^2 (a-b)(a-c) = \sum bc(bc-ab)(bc-ac)$$

$$\text{所以, 原式} \Leftrightarrow abc \sum a(a-b)(a-c) + \sum b^2 c^2 (a-b)(a-c) \geq 0$$

(7)

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ & -3 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ & & 0 & 2 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -3 & -3 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

提一个 4 倍 Schur: $\sum(4a^5 + 2a^2b^2c - 3ab(a^3 + b^3)) - 4\sum(a^3(a-b)(a-c)) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & -4 & 2 & -4 & 1 \\ & & 0 & 2 & 2 & 0 \\ & & & 0 & -4 & 0 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

很明显 4 个 1 攻击一个 -4, 六个均值, 也可以说是三个四元均值

那么如果换个思路, 为了把 -3 弄掉而提 3 倍 Schur:

$\sum(4a^5 + 2a^2b^2c - 3ab(a^3 + b^3)) - 3\sum(a^3(a-b)(a-c)) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ & & 0 & 2 & 2 & 0 \\ & & & 0 & -3 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

剩下就是这样, 正好也是均值, 重心, 三元均值。

甚至我们可以提 2 倍 Schur, 为了用到中间的 2, 取第五题那样的 Schur:

$$\sum (4a^5 + 2a^2b^2c - 3ab(a^3 + b^3)) - 2 \sum a(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 & -3 & 2 \\ & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ & & 2 & 0 & 0 & 2 \\ & & & 2 & 0 & 2 \\ & & & & -3 & -3 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

然后可以拆成三条 $[1, -3, 2, 2, -3, 1]$ ，这恰好是 $(a+b)(a-b)^4$

注：提出的结构必须契合不等式的取等，首先注意到 ab 边上和为 0，因此你要动角上那个 1 的话，不可能用均值或者 $(a-b)^{2n}$ ，因为它是二元对称的，所以总之先考虑 $(a+b)(a-b)^4$ 这个通常来说最强的东西

(8)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & -1 & 2 & 2 & -1 \\ & & & -1 & -1 & -1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

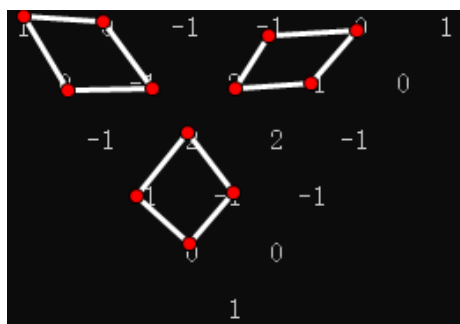
显然不能提出三个大 Schur: $\sum a(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)$ ，提完会当场去逝。

可以试试提 $\sum a^3(a-b)(a-c)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ & & -1 & 2 & 2 & -1 \\ & & & -1 & -2 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

看到这个我们顶多想到拆三个小 Schur，但也会去逝。（实际上可以配方，但现在先假装不会）
于是我们还有最后一个选择

拆三个四阶的 Schur: $\sum (a^5 + 2a^2b^2c - a^3(b^2 + bc + c^2)) - \sum a \sum a^2(a-b)(a-c) = 0$ 然后
拆完发现啥都没了，拆了三个这样的四阶 Schur:



反正也就这么一个选择，所以有因式 $\sum a$ ，这提示我们做题时要先因式分解

(9)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -7 & 6 & -7 & 0 \\ & & 0 & 6 & 6 & 0 \\ & & & 0 & -7 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

这是上次均值习题的升级版，提一个 Schur: $\sum (a^5 + 6a^2b^2c + 7a^3bc) - \sum a^3(a-b)(a-c) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & -8 & 6 & -8 & 1 \\ & & 0 & 6 & 6 & 0 \\ & & & 0 & -8 & 0 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

然后是三个 $[1, -4, 6, -4, 1]$

(10) 齐次化即 $\sum a^6 + 21a^2b^2c^2 - 4\sum a^2b^2(ac+bc) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ & & 0 & -4 & 21 & -4 & 0 \\ & & & 0 & -4 & -4 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

和上一题差不多，一个 Schur 和三个 $[1, -4, 6, -4, 1]$

7 配方

7.1 平方

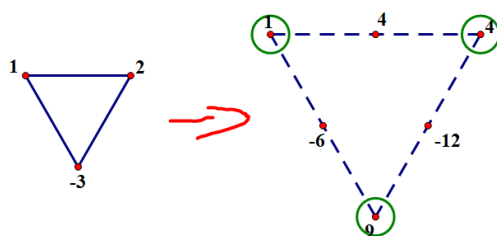
下面分别是 $(a-b)^2$ 、 $(a+b-2c)^2$ 、 $(a+2b-3c)^2$ ，试观察其特点：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & -4 & -4 \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ & -6 & -12 \\ & & 9 \end{bmatrix}$$

首先把要平方的阵放大一倍，在对应位置（在大阵上可以称作“桩”）写上小阵各项的平方，然后在每对桩的中点处加上小阵对应数的乘积的两倍，通过完全平方公式不难理解这个规律。值得注意的是，位于凸包顶点处的数必定满足大阵系数为小阵系数的平方。



练习 3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & \\ 0 & & \end{bmatrix}^2$

练习 4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \\ 0 & & \end{bmatrix}^2$

练习 5 有中点重合的 $(a^2 - ab - ac + bc)^2$ (算的时候可以装作不知道它可以分解)

练习 6 $(2a^2 - 3ab - 4ac + 5bc)^2$

练习 7 $(2a^2 - 2ac + 3bc + ab + 2b^2)^2$

答案 3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & \\ 0 & & \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & \\ 0 & 0 & 9 & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$

答案 4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \\ 0 & & \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$

$$\text{答案 5} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & -1 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ & -2 & 4 & -2 & 0 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{答案 6} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ & -4 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -12 & 9 & 0 & 0 \\ & -16 & 44 & -30 & 0 \\ & & 16 & -40 & 25 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{答案 7} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & -2 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 & 4 & 4 \\ & -8 & 8 & -2 & 12 \\ & & 4 & -12 & 9 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

希望能感受到这种方法相对于写代数式的便利, 而且这样写也便于后续操作, 例如求轮换和之类。

7.2 因式分解

比如考虑一个齐 n 次的轮换式, 那它的非轮换因式必然次数不超过 $\frac{n}{3}$, 在此基础上我们可以利用 $g(a, b, 0) | f(a, b, 0)$ 进行筛选, 这里系数阵除了方便看 $f(a, b, 0)$ 之外也没什么特别的

优势，筛选之后就是试着除，那么系数阵作除法的时候稍稍有点帮助，我们可以从上到下从左到右地除，举个例子：

$$\begin{array}{ccccccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & 0 & -18 & 0 & 0 & -18 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & 18 & 0 & 0 & 18 & & 1 & 3 & 1 & \\
 & & & & 0 & -18 & 0 & & & 3 & 3 & \\
 & & & & & 0 & 0 & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1 & & & & &
 \end{array}$$

比如这个（前面考虑到 $[1, 3, 1][1, 0, 0, 18, 0, 0, 1]$ 所以作这个尝试

$$\begin{array}{ccccccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & 0 & -18 & 0 & 0 & -18 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & & 1 & 3 & 1 & \\
 & & & 18 & 0 & 0 & 18 & & & 3 & 3 & \\
 & & & & 0 & -18 & 0 & & & & 1 & \\
 & & & & & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & &
 \end{array}$$

那么我们先戳个四次的阵当作结果

$$\begin{array}{ccccccc|cccc}
 0 & -3 & -1 & 18 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & -3 & -21 & 0 & 0 & -18 & 0 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & & 1 & 3 & 1 & & 0 & 0 \\
 & & & 18 & 0 & 0 & 18 & & & 3 & 3 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & -18 & 0 & & & & 1 & & 0 & 0 & \\
 & & & & & 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 1 & & & & & & & 0 &
 \end{array}$$

然后从左上角开始

$$\begin{array}{ccccccc|cccc}
 0 & 0 & 8 & 21 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & -3 & -12 & 9 & 0 & -18 & 0 & & & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & -1 & 3 & -3 & 0 & 0 & & 1 & 3 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 18 & 0 & 0 & 18 & & & 3 & 3 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & -18 & 0 & & & & 1 & & 0 & 0 & \\
 & & & & & 0 & 0 & & & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 1 & & & & & & & 0 &
 \end{array}$$

这样一个个减下来就行了，情况特殊的话可以稍作变化，比如这里知道结果是轮换对称的，就可以一次性拿 $a^4 + b^4 + c^4$ 。

7.3 配方法引入

那么开始配方法的引入，这要从“想出一个 $(a, b, c) = (1, 2, 0)$ 能取等的不等式”开始，想要的还是三元齐次轮换的，那么自然就希望 $F(a, b, 0)$ 和 $(2a - b)^2$ 有点关系。但角上的数得想等，不可能一个 1 一个 4，最终自然就造出了这个：

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & 4 \\ & & -4 & -1 & -4 \\ & & & 4 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

写出来的时候尚且没有确定它是否是非负的。在在没有引入配方法的时候，均值和舒尔自然是难以解决这个问题的，毕竟它应当有 111, 210, 102, 021 四个取等。

那么我们回到代数式来看这个问题是啥，把这些 $[4, -4, 1]$ 理在一起，发现它就是 $\sum ab(2a - b)^2 \geq abc(a + b + c)$ ，不禁让人想除掉 abc ，就是 $\sum \frac{(2a - b)^2}{c} \geq a + b + c$ ，到这里我们意识到 $\frac{(2a - b)^2}{c} + c \geq 2(2a - b)$ 轮换和一下就行了。

现在我们反过来看看 $\frac{(2a - b)^2}{c} + c \geq 2(2a - b)$ 对于系数阵而言有何意味，我们知道基本不等式的一个本质是 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 等价于 $(a - b)^2 \geq 0$ ，所以 $\frac{(2a - b)^2}{c} + c \geq 2(2a - b)$ 其实就是 $\frac{(2a - b - c)^2}{c} \geq 0$ ，把那个 abc 乘回来，发现我们做的事就是利用了 $\sum ab(2a - b - c)^2 \geq 0$ 。

这时候我们再看看它在系数阵里面对应了什么平方的轮换和：

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ & 0 & -4 & 2 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

是这个东西的轮换和，这个平方轮换和一下一定是总和为 0 的，而且边上还一定就是这个 $[4, -4, 1]$ 。于是我们知道了如何以系数阵的视角看这个做法，此后我们就可以直接从系数阵上寻求类似的操作了。

例如，

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -6 & 1 & 0 \\ & 1 & -4 & -4 & 9 \\ & & -6 & -4 & -6 \\ & & & 9 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} 0 & 9 & -6 & 1 & 0 \\ & 0 & -12 & 4 & 0 \\ & & 0 & 4 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

例 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & -4 & 12 & 12 & -4 \\ & & 6 & 12 & 6 \\ & & & -4 & -4 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

解 5 即 $(\sum(a^2 - 2ab))^2$

练习 8

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ & 4 & -2 & -2 & 1 \\ & & 3 & -2 & 3 \\ & & & 1 & 4 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

答案 8 $[1, -3, 4]$ 不是完全平方，实际上这个东西是松了，但我们依然可以照 $[1, -4, 4]$ 的那个来配，力求把角上的 1 和 4 妥善使用掉，我们拿去三个平方还剩下这个

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

自然可以基本不等式搞掉

再来一个稍微难一点的：

$$\begin{bmatrix} 0 & 13 & -33 & 21 & 0 \\ & 21 & 0 & 0 & 13 \\ & & -33 & 0 & -33 \\ & & & 13 & 21 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

注： $4 \times 13 \times 21 - 33^2 = 3$ 也即 $4 \times 13 \times 21 > 33^2$

配方，即 $\sum ab(\sqrt{13}a - \sqrt{21}b + (\sqrt{21} - \sqrt{13})c)^2 + (\sqrt{13 \times 21} - \frac{33}{2}) \sum c^2(a - b)^2 \geq 0$

我们在配方时往往同时带着“把角上正项消去”和“不放过头”两个意图来拆取平方，这点对于配方法非常重要，如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & -26 & 17 & 0 \\ & 17 & -1 & -1 & 10 \\ & & -26 & -1 & -26 \\ & & & 10 & 17 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

可以先减掉 $\sum \begin{bmatrix} 0 & 9 & -24 & 16 & 0 \\ & 0 & 6 & -8 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \sum ab \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ & 1 \end{bmatrix}^2$

然后还是均值，那么我们可以总结一下这种角上为 0 且齐四次轮换的不等式的通法：

$$\begin{bmatrix} 0 & 13 & -26 & 17 & 0 \\ & 17 & d & -1 & 10 \\ & & -26 & -1 & -26 \\ & & & 10 & 17 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

设这四个位置上的数为 a, b, c, d ，其中 $a, c > 0$ 。首先，考虑到它得以成立，必然要有 $4ac \geq b^2$ ， $a + b + c + d \geq 0$ 。相对地，一旦保证了这四点，就可以拆下一个

$\sum xy(\sqrt{ax} - \sqrt{cy} - (\sqrt{a} - \sqrt{c})z)^2$ ，然后均值即可，此即这类不等式的通法。那么下面难度升

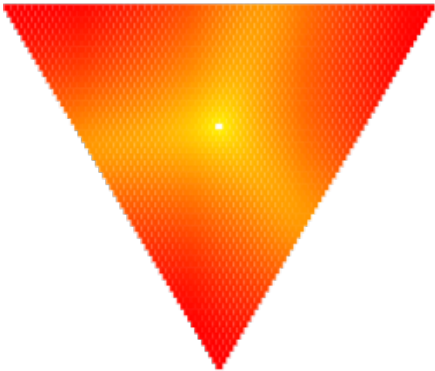
级一下，角上不为零的齐四次轮换对称：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ & -2 & 0 & 0 & -2 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ & & & -2 & -2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

这是 $\frac{1}{2}(a-b)^4$ ，但也可以直接考虑 $(\sum(a^2-ab))^2$.

练习 9 $(\sum a)^5 \geq 27 \sum ab^2 \sum ab$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & -17 & 5 & 1 \\ & 5 & -7 & 3 & -7 & 5 \\ & & -17 & 3 & 3 & 10 \\ & & & 10 & -7 & -17 \\ & & & & 5 & 5 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$



答案 9 $s(a)^5-27s(ab^2)s(ab)-s(a(2b^2-2c^2-4ab+ac+3bc))^2=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & -2 & 0 & 0 & -2 \\ & & & -2 & 1 & -2 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

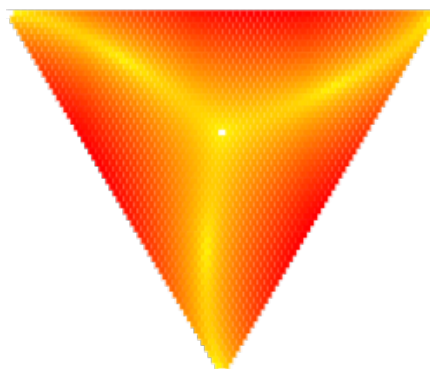
前情提示：Vasile 不等式，下面这两题与之类似

已知 $\sum a = 2$ ，求证： $\sum \frac{a}{1+b^2} \geq \frac{18}{13}$

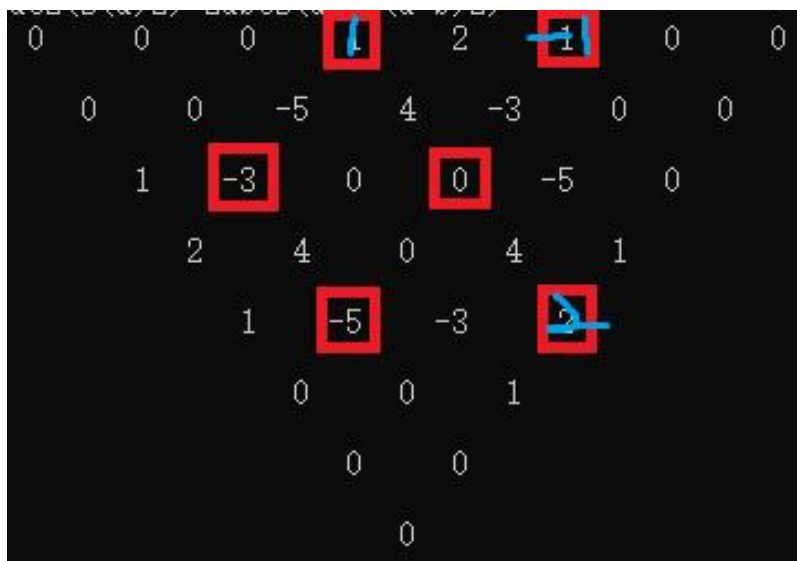
已知 $\sum a = 3$ ，求证： $9 \geq (\sum a^2 b)(\sum ab)$

练习 10 $s((ac^2(s(a)^2)-2abcs(ab))(a-b)^2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



答案 10 $s((ac^2(s(a)^2)-2abcs(ab))(a-b)^2)-s(b(a^2b-ab^2+2bc^2-2a^2c+(a^2c-abc)-(ac^2-abc))^2)$



立这几个位置为桩，和 $\sum \frac{a^2}{b}$ 那道题时候的想法类似，一开始贪一点，考虑一次性把外边消完，于是定下了这三个，剩下三个数（总和为 0 所以只有两个自由度）随便调调（“ $+(a^2c - abc) - (ac^2 - abc)$ ” 就看出是在待定系数了）

8 二次元

8.1 针对取等的定向配方

在遇到一些可能不太妙的题目时，除了检查 $f(1, 1, 1)$ 这个最平凡的点之外，也要注意 $f(a, b, 0)$ 和 $f(a, b, b)$ 两个特殊的降维情况看 $f(a, b, b)$ 时，可以一行一行看总和，然后从下往上念，比如 $[1, -6, 13, -12, 4]$ ，也就是 $a^4 - 6a^3b + 13a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$ ，而原不等式有 $a = b = c$ 取等的话 $f(a, b, b)$ 必有 $(a - b)^2$ 因式，那么不难发现它其实是 $(a - b)^2(a - 2b)^2$ ，由此我们会发现原不等式有取等 $(2, 1, 1)$ ，接下来给一个经典的例子：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -3 & & & \\ & & -3 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \\ & & 8 & & & \\ & & & -3 & & 8 \\ & & & & -3 & & -3 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

我们知道既然有取等 111, 211, 121, 112，那该怎么配方呢？如果我们要拆一个平方，使得减去这个平方后依然非负，那么这个平方肯定在 111, 211, 121, 112 这四个点上取值是 0，即要覆盖四个取等，类似于两点确定一条直线，我们可以确定一个一次式 $\square a + \square b + \square c$ ，使得它在 111, 211 上都取 0，即 $b - c$ ，也可以确定一个在 121, 112 上都取 0 的，即 $3a - b - c$ ，但实际上我们可以直接利用叉乘得到它，因为这个东西在 $(a, b, c) = (1, 2, 1)$ 或 $(1, 1, 2)$ 的时候肯定取 0：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

不会叉乘的话也可以待定系数解线性方程组，那么考虑到 a^4 系数，我们要拆的就是 $\frac{1}{2} \sum (a - b)^2(a + b - 3c)^2$ ，拆完之后什么也不剩了，我们姑且把这个技术叫做**针对取等的定向配方**。

练习 11 求一个关于 a, b, c 的齐一次式使得 $(a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 1)$ 时都取到零

答案 11 $-7a + 5b - c$

例 6 求证: $4(x+y+z)^3 \geq 27(x^2y + y^2z + z^2x + xyz)$

解 6 即证

$$\begin{bmatrix} 4 & -15 & 12 & 4 \\ & 12 & -3 & -15 \\ & & -15 & 12 \\ & & & 4 \end{bmatrix} \geq 0$$

注意到 210 是它的取等, 但定向配方配出来会是四次的, 所以可以给它乘上 $a+b+c$ 再拆定向配方

问题: 我怎么知道要乘上去的因子是什么?

我们要保证拆的东西对上取等, 但上次的方法只能得到四次的, 所以至少升一次, 那么为了对称就用 $a+b+c$ 了, 升次一般会增大可操作性, 但升的太高会难算, 要权衡。

怎么注意到取等条件的?

这里是检查 $f(a, b, 0)$

最后就是 $\sum (2a-b-c)^2(a-2b+4c)^2$

注意到 $[1, -4, 4][4, -15, 12, 4]$

$s(4a^3-15a^2b+12ab^2-abc)s(a)-s((a+b-2c)2(2a-4b-c)2)/6=$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -12 & 12 & 0 \\ & 12 & -3 & -3 & 3 \\ & & -12 & -3 & -12 \\ & & & 3 & 12 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

拆完之后是这个, 正好和配方最开始的那个例题很像, 毕竟拆剩下来的东西肯定也是有那四个取等, 所以也只能是这个东西的若干倍了。

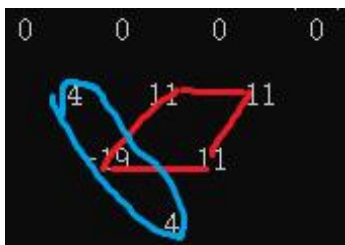
其实还有个不乘 $a+b+c$ 的做法: 我们考虑把第一行减完, 第一行即 $[1, -4, 4] \cdot [4, 1]$, 所

以我们拆个 $(a - 2b + c)^2(4a + b)$ 得到

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 11 & -11 \\ & & -19 & 11 \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

应该能看出来这是

$c(4(a - c)^2 + 11(a - b)(b - c))$, 毕竟那三个 11 很显眼, 所以设个 b 为中位数就能保证它非负了。



那么这里有个隐藏知识点: “不妨 b 为中位数” 之下, $(a - b)(b - c)$ 就是一个非负原件了, 那么有些小朋友可能会补充说 $(a - b)(a - c)$ 、 $(a - c)(b - c)$ 也是非负的, 但其实后两个不用单独拎出来说, 因为它们可以认为是 $(a - b)(b - c)$ 的延伸, 其中 $(a - b)(a - c) = (a - b)(b - c) + (a - b)^2$, $(a - c)(b - c) = (a - b)(b - c) + (b - c)^2$, 所以究其本源的话注意 $(a - b)(b - c)$ 是非负元件就行了。

例 7

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & 1 & -7 & 14 & 14 & -7 & 1 \\ & & -4 & 14 & -63 & 14 & -4 \\ & & & 6 & 14 & 14 & 6 \\ & & & & -4 & -7 & -4 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

解 7 $(s(ab(a-b)^4)-7abcs(a^3-2a^2b-2a^2c+3abc))s(a)-s(c(a-b)^2((a+b-c)^2-3ab)^2)-5/2abcs((a-b)^2(a+b-7/2c)^2)-1/8abcs((a-b)^2(4ab+3c^2))$

我们来看这个加强：（它有取等 111,110,100,113）

练习 12 $\sum ab(a-b)^2(a+b-4c)^2 \geq 4(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$

答案 12

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & 1 & -8 & 16 & 16 & -8 & 1 \\ & & -4 & 16 & -72 & 16 & -4 \\ & & & 6 & 16 & 16 & 6 \\ & & & & -4 & -8 & -4 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$(s(ab(a-b)^4)-8abcs(a^3-2a^2b-2a^2c+3abc))s(a)-s(c(a-b)^2((a+b-c)^2-3ab)^2)-2abcs((a-b)^2(a+b-4c)^2)$

注：本题可以推广： $\forall u \in \mathbb{R}, \sum ab(a-b)^2(a+b-uc)^2 \geq 4 \prod (a-b)^2$. 它有取等 (1, 1, u-1), (1, 1, 0) 等轮换。事实上，推广反而比原题更简单，因为它可以看成关于 u 的二次函数算 Δ 。实际上 $\Delta = -4abc \prod (a-b)^2 \sum (a(a-b)(a-c) + 9abc) \leq 0$ 就做完了。这种非常特殊的方法在后面还会看到。

8.2 二次元

我们先给出一个使得 $(a,b,c)=(1,1,1),(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ 都能取等的恒大于零的齐四次轮换不等式： $\sum (a-2b+c)^2(5a-b-7c)^2$ 再计算这个被平方式本身的轮换和 $\sum (a-2b+c)(5a-b-7c)$ ，发现居然是 0。

实际上我们不难证明，**如果一个齐二次式在 $(1,1,1)(p,q,r)(q,r,p)(r,p,q)$ 处都取 0，且其中 p,q,r 不全相等，那么它的轮换和必为 0**，我们把这样的二次式称作**二次元**。例如 $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3a^3b+3b^3c+3c^3a$ ，这个点对于齐四次中有特殊取等的 inequality（如 Vasile 不等式）很重要，

例 8 设 x_a 是一个二次元 (它轮换后的为 x_b, x_c) , 求 $\frac{\sum (x_a + 2x_b)^2}{\sum (x_a)^2}$, 注意二次元必有 $\sum x_a = 0$

解 8 利用 $2 \sum x_a x_b = - \sum x_a^2$ 得到原式等于 3。

例 9 求 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & \\ -3 & & \end{bmatrix}$ 的平方, 然后对结果求轮换和, 并解释为什么结果有 14 这么个挺大的因数。

解 9 其平方为 $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & -8 & 4 \\ & -2 & 10 & -16 & 12 \\ & -5 & 6 & -3 & \\ & 6 & -18 & & \\ & 9 & & & \end{bmatrix},$

其轮换和为 $\begin{bmatrix} 14 & 14 & 0 & -28 & 14 \\ & -28 & 0 & 0 & 14 \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 14 & -28 & & \\ & 14 & & & \end{bmatrix}$ 会发现它有挺大的公因数 14, 之

后讲到 Vasile 的时候会说这个的。

提示: 这个被平方的东西轮换和为 0, 设那个是 x_a , 那么 $\sum x_a^2$ 理应和 $\sum (x_a - 2x_b)^2$ 有线

性关系, $x_a - 2x_b$ 是
$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & \\ -7 & & \end{bmatrix}$$
, 也就是说 $\sum x_a^2$ 应该是 $\sum (a^2 - c^2 - ac + bc)^2$ 的

若干倍, 考虑到它角上的系数是 $1^2 + 2^2 + 3^2$, 所以所有的系数都是 14 的倍数就很正常了。

这揭示了我们设二次元的时候可以优先考虑 $a^2 - b^2 + \square ab + \square ac + \square bc$ 型的, 即不妨 c^2 前的系数是 0, 那么其实 Vasile 如何配方已经差不多出来了, 这里就出现了一个神奇的现象, 正因为我们知道 Vasile 不等式很强, 有个厉害的非平凡取等, 所以我们可以轻松地击破它。

你已经知道 Vasile 有非平凡的取等了, 你尝试考虑它就是 $\frac{1}{2} \sum (a^2 - b^2 - pac + qbc + (p - q)ab)^2$ 然后根据 a^3b 和 ab^3 系数解一下 p, q 试试, 然后确认一下 a^2b^2 系数即可, 实际上就是 $p = 1, q = 2$ (第三个可以设为 $p - q$ 的原因是其轮换和是 0)

练习 13 $\frac{1}{2} \sum (a^2 - b^2 - (ac - ab))^2$

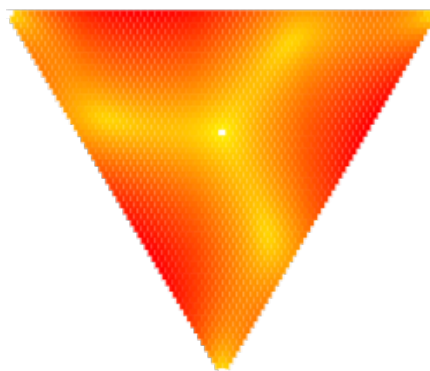
答案 13

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & -2 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

证明: 等价于 $\frac{1}{2} \sum (a^2 - b^2 - (ac - ab))^2 \geq 0$

练习 14 $s(a^2(5a+3b)(b^2+c^2)(c^2+a^2))-4s(a)p(a^2+b^2)$ AOPS

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & & & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ & & & & 4 & -1 & -1 & -4 \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

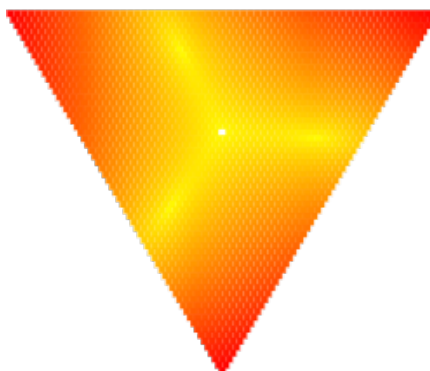


答案 14 $s(a^2(5a+3b)(b^2+c^2)(c^2+a^2))-4s(a)p(a^2+b^2)-s(a(a^2b-a^2c+2ac^2-2abc-1/2(b^2c-abc))2)$

8.3 Vasile 不等式

Vasile 不等式: 对于 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & -3 \\ & & 2 & 0 & 2 \\ & & & -3 & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$



Vasile 不等式除了 $(1, 1, 1)$ 取等以外还有 $\left(\sin^2 \frac{4\pi}{7}, \sin^2 \frac{2\pi}{7}, \sin^2 \frac{\pi}{7}\right)$ 及轮换的取等。

设 $f(a, b, c) = a^2 - b^2 + (ab - ac) + 2(bc - ab)$, 则可以证明 $f(a, b, c)$ 在 Vasile 的四个取等处都是零。 $f(a, b, c)$ 的轮换也有此性质。这个 f 就是二次元。并且, Vasile 不等式的配方为:

$$\left(\sum a^2\right)^2 - 3\sum a^3b = \frac{1}{2}\sum f(a, b, c)^2 \geq 0$$

但是 Vasile 不等式的配方不是唯一的。如果设 $g(a, b, c) = f(a, b, c) + \lambda f(b, c, a)$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, 那么 $g(a, b, c)$ 当然也在 Vasile 的四个取等处都是零。 $\sum g(a, b, c)^2$ 也能配出 (等式成

立的原因参考例8):

$$\left(\sum a^2\right)^2 - 3\sum a^3b = \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} \sum g(a, b, c)^2 \geq 0$$

所以 Vasile 不等式有无数多配方。可以这么理解: 只要一个二次式经过 Vasile 不等式的四个取等, 那么它的轮换平方和一定是 Vasile 不等式的倍数 (因为有这四个取等且非负的三元四次轮换一定是 Vasile 不等式的倍数)。

如果非齐次化, 设 $c = 1$, 那么

$$g(a, b, 1) = [a^2 - b^2 + (ab - a) + 2(b - ab)] + \lambda [(b^2 - 1) + (b - ba) + 2(a - b)]$$

正是经过这四个取等点的二次曲线系, 由两个特例的二次曲线线性组合得到。

8.4 三元四次配方定理 (苏州 褚小光)

设 $a, b, c \in \mathbb{R}, m > 0, n, p, q \in \mathbb{R}$, 已知 $3m(m+n) - (p^2 + pq + q^2) \geq 0$. 则

$$m \sum a^4 + n \sum b^2c^2 + p \sum a^3b + q \sum ab^3 - (m+n+p+q)abc \sum a \geq 0$$

注意这是对于实数 a, b, c 的。

证明: 配方得

$$\begin{aligned} & m \sum a^4 + n \sum b^2c^2 + p \sum a^3b + q \sum ab^3 - (m+n+p+q)abc \sum a \\ &= \frac{1}{18m} \sum [3m(a^2 - b^2) + (p+2q)ca + (p-q)ab - (2p+q)bc]^2 + \\ & \frac{3m(m+n) - (p^2 + pq + q^2)}{18m(p^2 + pq + q^2)} \sum [(p+2q)ca + (p-q)ab - (2p+q)bc]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(1) 当 $m = 1, n = 0, p = -2, q = 1$, 即 $3m(m+n) - (p^2 + pq + q^2) = 0$.

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + c^4 + ab^3 + bc^3 + ca^3 - 2(a^3b + b^3c + c^3a) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - ab + bc)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - c^2 - bc + b + ca)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - a^2 - ca + b + ab)^2 \end{aligned}$$

(2) 当 $m = 1, n = 2, p = -3, q = 0$, 即 $3m(m+n) - (p^2 + pq + q^2) = 0$.

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 3(x^3y + y^3z + z^3x) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 - xy - zx + 2yz)^2 \\ & + \frac{1}{2}(y^2 - z^2 - yz - xy + 2zx)^2 + \frac{1}{2}(z^2 - x^2 - zx - yz + 2xy)^2 \geq 0 \text{ 即 Vasile 不等式} \end{aligned}$$

取等: 对于二次元 (的平方和) $\sum (a^2 - b^2 + u(ab - ac) + v(bc - ab))^2$, 若 $uv \neq 1$, 有非平凡取等 $(a, b, 1)$, 其中 $a = \frac{b^2 + b(u-v) - 1}{bu - v}$, 而 b 是以下三次方程的根. (该方程三根必为实数且三个根对应轮换的取等)

$$x^3 + \frac{(v-u)(uv+u+v-2)+u^3+1}{1-uv}x^2 + \frac{(v-u)(uv+u+v-2)-v^3-1}{1-uv}x - 1 = 0$$

若 $uv = 1$, 非平凡取等为 $(u, 0, 1)$ 及轮换. 非平凡取等非负当且仅当 $uv \geq 1, u \geq 0, v \geq 0$ 成立.

取等处还满足关系式 $\sum a^2 = \frac{u^2 - u + v^2 - v - uv + 3}{u + v - 1} \sum ab$.

(1) 当 $u = 0, v = 1$, $\sum (a^4 + ab^3 - 2a^3b)$ 取等为 $\left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{9}}, \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{9}}, -\frac{1}{\sin \frac{4\pi}{9}}\right)$ 等

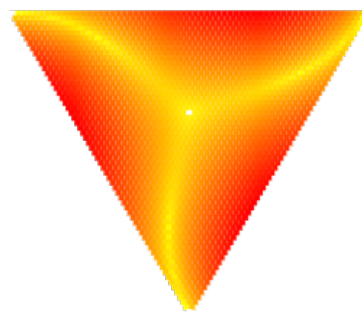
(2) 当 $u = 1, v = 2$, $\left(\sum a^2\right)^2 - 3 \sum a^3b = \frac{1}{2} \sum (a^2 - b^2 + (ab - ac) + 2(bc - ab))^2$

Vasile 不等式取等为 $\left(\sin^2 \frac{4\pi}{7}, \sin^2 \frac{2\pi}{7}, \sin^2 \frac{\pi}{7}\right)$ 等

8.5 伴随二次元

例 10 $s(a(a2c-ab2)(a2c-ab2-3abc))$ AOPS

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ & & 1 & -3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ & & & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ & & & & 0 & -2 & -3 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$



解 10 $s(a(a2c-ab2)(a2c-ab2-3abc))s(a)-1/2s((a3c-a2b2-ab3+b2c2-a2bc+2ab2c-abc2)2)-s(ab(a2c-ab2-ac2-abc+2bc2)2)$ 因为有取等, 所以那两个被平方式在特定需求下都被唯一确定下来了, 通过一些作弊手段发现非平凡取等对应的二次元为 $a2-b2-3ab+5bc-2ca$, 然后拿这个二次元加加减减得到一个关于 ab, ac, bc 的二次元 $(5bc(c2-a2-3ca+5ab-2bc)-c2(a2-b2-3ab+5bc-2ca)+2ca(b2-c2-3bc+5ca-2ab))/9$ 我们叫这个为伴随二次元。

$$\begin{array}{cc}
 \text{二次元} & \text{伴随二次元} \\
 \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ & -2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 3 & 0 \\ & & 1 & -2 & -1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

这两块积木都是小等腰梯形状的，不过区别在于伴随二次元刚好转了 180° 度。(原本的二次元的等腰梯形下底更靠近系数阵的边，而伴随二次元的等腰梯形上底更靠近系数阵的边。)

一开始不乘 $s(a)$ 升幂会配不出来我就不解释了，第一次配方的时候意图找这样一个被平方式：

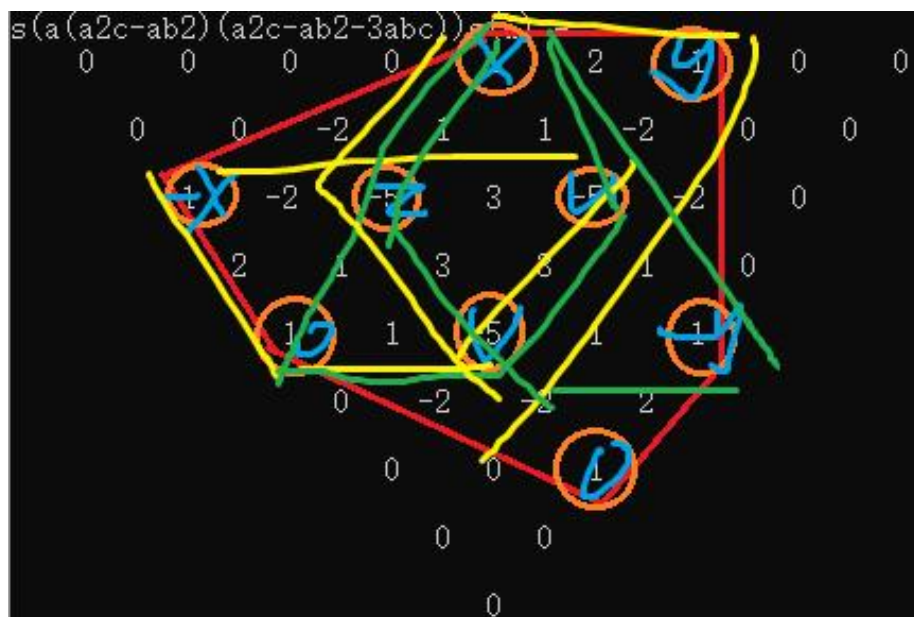
The image shows a complex algebraic expression with a grid of coefficients. The expression is: $s(a(a^2c-ab^2)(a^2c-ab^2-3abc))s(a) =$ followed by a grid of numbers. Several terms are circled in blue and crossed out with red X's. The grid of numbers is as follows:

0	0	0	0	0	2	0	0
0	0	-2	1	1	-2	0	0
-1	-2	-5	3	-5	-2	0	0
2	1	3	3	1	0	0	0
1	1	-5	1	-1	0	0	0
0	-2	-2	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

于是就可以用上面的二次元和伴随二次元搭出来了，第二次也是类似的：

二次元 (的平方和) $\sum (a^2 - b^2 + u(ab - ac) + v(bc - ab))^2$ 的伴随二次元是

$$a^2c - b^2c + \frac{u^2 + v}{1 - uv}(a^2b - abc) - \frac{v^2 + u}{1 - uv}(ab^2 - abc)$$



已知特殊取等与 Vasile 不等式相同，二次元应当是 $a^2 - b^2 + (ab - ac) + 2(bc - ab)$ 。

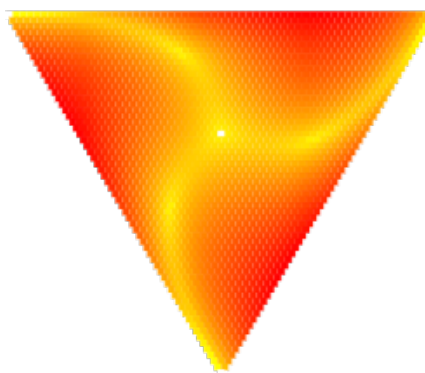
解答

$$(b+c)s(a(a^2c-ab^2)(a^2c-ab^2-3abc))-ab(a^2c-ab^2-abc-ac^2+2bc^2)-ac(a^2c-2ab^2+abc+b^2c-bc^2)- \\ (a^2bc-a^2c^2-ab^3+ab^2c-2abc^2+b^2c^2+bc^3)^2$$

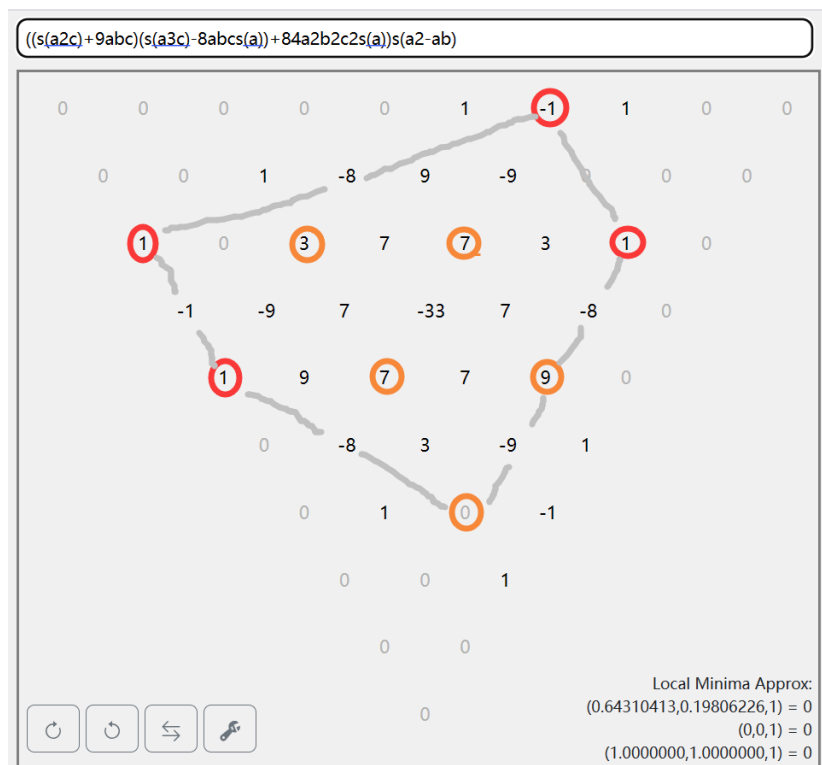
注：本题有推广： $u \in \mathbb{R}$, $\sum a^3(ac - b^2)^2 + abc \sum [(u^2 - 1)(a^2b^2 - a^2bc) - (2u - 1)(ab^3 - a^2bc)] \geq 0$ 。当 $u = 2$ 时的特例就是本题。推广比原题更简单，因为看成关于 u 的二次函数， $\Delta = -4abc \sum a [\sum (a^3bc - a^3c^2)]^2 \leq 0$ 。

练习 15 $(s(a^2c)+9abc)(s(a^3c)-8abcs(a))+84a^2b^2c^2s(a)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



答案 15 有与 Vasile 相同的特殊取等。尝试乘 $s(a^2-ab)$ ，系数阵如下图。红色与橙色是桩（平方项），注意边上的 $[1, -1, 1]$ 刚好等于 $[1, -2, 1] + [0, 1, 0]$ ，取好合适的平方式可以解决掉整个边。



$$((s(a^2c)+9abc)(s(a^3c)-8abcs(a))+84a^2b^2c^2s(a))s(a^2-ab)=$$

$$s(a(a^3c-a^2c^2-ab^3+3ab^2c-abc^2+b^3c-3b^2c^2+2bc^3-a^2bc)^2)+p(a)s(2a^2b-3a^2c+abc)^2$$

8.6 非负三元四次的通法

如果三元四次轮换式对于实数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 成立, 则可以套三元四次定理. 但是对于非负 a, b, c 的不等式则不一定. 例如升次的 Schur 就不能: $\sum a \sum a(a-b)(a-c)$. 但它可以通过减一点东西 $\sum ab(a-c-u(b-c))^2$ 变成能套三元四次定理的:

$$\sum a \sum a(a-b)(a-c) - \sum ab(a-b)^2 = \frac{1}{2} \sum (a^2 - ac - b^2 + bc)^2$$

实际上, 这个“减一点东西”便是非负三元四次定理的通法, 可以证明:

定理 若 $f(a, b, c) = \sum (a^4 + pa^3b + na^2b^2 + qab^3 - (1+p+n+q)a^2bc) \geq 0$ 对于 $a, b, c \geq 0$ 恒成立, 则必为以下两种情况之一:

(1) 若 $3(1+n) - (p^2 + pq + q^2) \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} f(a, b, c) = & \frac{1}{2} \sum \left(a^2 - b^2 + \frac{p+2q}{3}(ac-ab) - \frac{2p+q}{3}(bc-ab) \right)^2 \\ & + \frac{3(1+n) - (p^2 + pq + q^2)}{6} \sum a^2(b-c)^2 \end{aligned}$$

(2) 若 $3(1+n) - (p^2 + pq + q^2) < 0$, 则三元四次轮换式

$$g(a, b, c) = f(a, b, c) - t \sum ab(a-c-u(b-c))^2$$

属于情形 (1). 其中 u 为 $2u^4 + pu^3 - qu - 2 = 0$ 的正根, 且 $t = \frac{(2q+p)u^2 + 6u + (2p+q)}{2(u^4 + u^2 + 1)} \geq 0$.

证明: 先证明 u 存在且能使 $t \geq 0$. 首先根据介值定理, $2u^4 + pu^3 - qu - 2 = 0$ 必有正根. 接着为证明 $t \geq 0$ 分情况讨论: 若 $2p+q \geq 0$ 且 $2p+q \geq 0$, 则显然成立. 若 $2p+q$ 或 $2q+p$ 至少有一个是负的, 根据对称性不妨设为 $2q+p < 0$. 下先证明 $(2p+q)(2q+p) \leq 9$.

反证, 若 $(2p+q)(2q+p) > 9$ 且 $2p+q < 0$, $2q+p < 0$, 即 $\frac{p+2q}{3} \cdot \frac{2p+q}{3} > 1$, 则

$$\frac{1}{2} \sum \left(a^2 - b^2 + \frac{p+2q}{3}(ac-ab) - \frac{2p+q}{3}(bc-ab) \right)^2$$

存在零点 $(a_0, b_0, 1)$ 且 $a_0, b_0 > 0$. 于是

$$0 \leq f(a_0, b_0, 1) = \frac{3(1+n) - (p^2 + pq + q^2)}{6} (a_0^2(b_0-1)^2 + b_0^2(1-a_0)^2 + (a_0-b_0)^2)$$

容易验证 a_0, b_0 不可能同时为 1, 因此 $a_0^2(b_0-1)^2 + b_0^2(1-a_0)^2 + (a_0-b_0)^2 > 0$, 进而三元四次定理使用条件成立: $3(1+n) - (p^2 + pq + q^2) \geq 0$, 不属于情形 (2), 矛盾.

为了证明 $t \geq 0$, 令 $h(x) = 2x^4 + px^3 - qx - 2$, 我们证明 $h(x_1) \leq 0 \leq h(x_2)$, 其中

$$x_1 = -\frac{3}{2q+p} - \frac{9 - (2p+q)(2q+p)}{-3(2q+p)} \quad x_2 = -\frac{3}{2q+p}$$

实际上, 代入通分并因式分解得

$$h(x_1) = \frac{((2p+q)^2 + 18)((2p+q)(2q+p) - 9)}{81} \leq 0$$

及

$$h(x_2) = -\frac{((2q+p)(2p+q) - 9)((2q+p)^2 + 18)}{(2q+p)^4} \geq 0$$

因此所取 u 可满足 $\max\{0, x_1\} \leq u \leq x_2$, 但 x_2 为二次函数 $(2q+p)u^2 + 6u + (2p+q)$ 对称轴, $\max\{0, x_1\} \geq -\frac{3}{2q+p} - \frac{\sqrt{9 - (2p+q)(2q+p)}}{-(2q+p)}$ 不小于该二次函数的左零点, 故必有 $t \geq 0$.

再说明 $g(a, b, c)$ 满足三元四次定理使用条件, 展开, 设 $w = 1 + p + n + q - t(1 - u)^2$,

$$g(a, b, c) = \sum (a^4 + (p-t)a^3b + (n+2tu)a^2b^2 + (q-tu^2)ab^3 - wa^2bc)$$

只需证明

$$-3 - 3(n+2tu) + (p-t)^2 + (q-tu^2) + (p-t)(q-tu) \leq 0$$

等价于证明

$$t^2(u^4 + u^2 + 1) + t(-2u^2q - u^2p - 6u - q - 2p) + p^2 + pq + q^2 - 3n - 3 \leq 0$$

代入 t 的值 (实际上是二次函数的对称轴), 等价于证明

$$\frac{(2u^2q + u^2p + 6u + q + 2p)^2}{4(u^4 + u^2 + 1)} + 3n + 3 - (p^2 + pq + q^2) \geq 0$$

但是 n 是有下界的, 可以通过 $f(u, 1, 0) \geq 0$ 推出:

$$f(u, 1, 0) = u^4 + pu^3 + nu^2 + qu + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad n \geq -pu - \frac{q}{u} - u^2 - \frac{1}{u^2}$$

代入上式, 只需证明

$$\frac{(2u^2q + u^2p + 6u + q + 2p)^2}{4(u^4 + u^2 + 1)} + 3 \left(-pu - \frac{q}{u} - u^2 - \frac{1}{u^2} \right) + 3 - (p^2 + pq + q^2) \geq 0$$

实际上左边通分可以因式分解:

$$\text{LHS} = -\frac{3(2u^4 + pu^3 - qu - 2)^2}{4u^2(u^4 + u^2 + 1)} = 0$$

(这也是 u 的选取为该方程的根的原因) 证毕.

从证明中看出, 如果卡住取等, 那么 u 必须取四次方程的根. 这是可能发生的, 如 $p = -q$ 时:

已知 $a, b, c \geq 0$, 参数 $t \in \mathbb{R}$, 则

$$\sum (a^4 - 2t(a^3b - ab^3) + (t^2 - 2)(a^2b^2 - a^2bc) - a^2bc) \geq 0$$

有非平凡取等 $\left(\frac{\sqrt{t^2+4}-t}{2}, 0, 1\right)$ 等.

证明可套用含对应取等的二次元, 令 $\phi = \frac{\sqrt{t^2+4}-t}{2}$ 则

$$f(a, b, c) = \frac{1}{2} \sum (a^2 - b^2 - \phi(ac - ab) + \phi^{-1}(bc - ab))^2 + \phi \sum bc (b - a - \phi^{-1}(c - a))^2$$

注: 亦可升次避免根号

$$\left(\sum a\right) f(a, b, c) = \sum a (b^2 + c^2 - a^2 - bc + t(ab - ac))^2 + \frac{t^2+3}{2} abc \sum (b - c)^2$$

最后, 其实上述定理并没有涵盖 $\sum a^4$ 系数为零的情况, 可补充如下:

若 $f(a, b, c) = \sum (pa^3b + na^2b^2 + qab^3 - (p+n+q)a^2bc) \geq 0$ 对于 $a, b, c \geq 0$ 恒成立, 则

$$f(a, b, c) = \sum ab (\sqrt{p}a - \sqrt{q}b)^2 + \frac{n+2\sqrt{pq}}{2} \sum a^2(b-c)^2$$

且 $p, q \geq 0, n+2\sqrt{pq} \geq 0$. 考虑边界这是显然成立的.

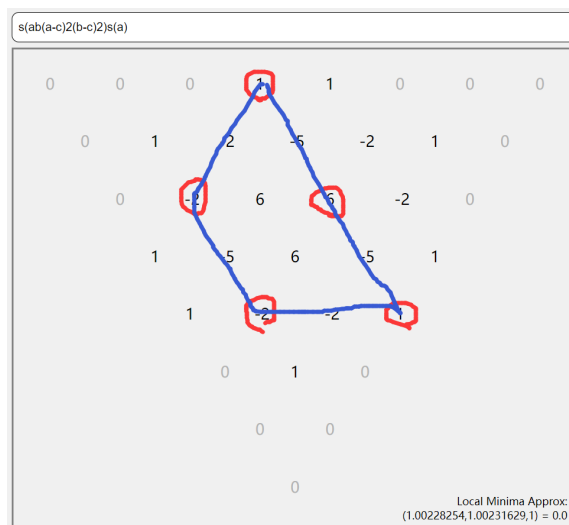
9 六芒星

9.1 六芒星

$$s(ab(a-c)^2(b-c)^2) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

形如上式的是六芒星。更一般的解决方法是乘 $s(a)$ 变成七次后用伴随二次元。如下找一个伴随二次元直接消掉最外圈的两个 1，这样拿完后就能除以 abc 变成四次。（这里有个特点， a^4b^3 和 a^3b^4 系数相等，即最外圈那六个系数相同）



配出来是 $s(c(2a^2b-a^2c-2ab^2+b^2c)^2)+1/2abcs((a^2-2ac-b^2+2bc)^2)$ ，前一项就是伴随二次元，

后一项是套三元四次定理。一般地, 伴随二次元这里会有两个待定系数 x, y

$$s(b(a2b-bc2-x(a2c-abc)+y(ac2-abc))2)$$

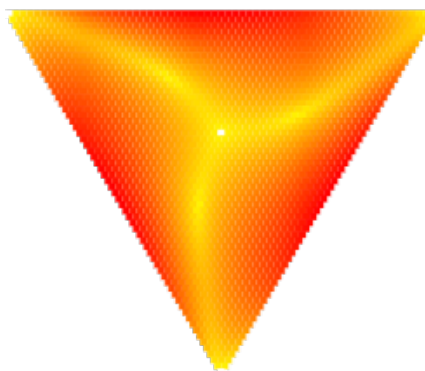
除了尝试以外, 一个更系统的方法(但需要一些计算, 极适合机器配方)是**让剩余的四次满足三元四次定理使用条件**。虽然是充分不必要的, 不一定成功, 但对实践中的绝大多数题都很管用。当 m 严格大于零, 判别式是

$$\begin{cases} p_0 = p - (y^2 - 2x) & q_0 = q - (x^2 - 2y) \\ \Delta = -3m(m + n + 2xy) + (p_0^2 + q_0^2 + p_0q_0) \end{cases}$$

寻找 x, y 使得 $\Delta \leq 0$ 即可, 可以直接找 Δ 的最小值点。其中 m, n, p, q 分别为 $a^5bc, a^3b^3c, a^4b^2c, a^2b^4c$ 的系数与 a^4b^3 系数的比值。

例 11 $(3s(6a4c-31a3bc+6a3c2+19a2b2c)s(a2)-18s(c(a3-abc+(-8/3)(a2b-abc)+(1/3)(ab2-abc)-(bc2-abc))2)) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -65 & -106 & 55 & 3 & 0 & \\ 0 & 55 & 77 & 77 & -65 & 0 & & \\ 18 & -106 & 77 & -106 & 18 & & & \\ 18 & -65 & 55 & 18 & & & & \\ 0 & 3 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{bmatrix}$$



解 11 凑系数 x, y 略困难, 套判别式: $m = \frac{3}{18}, n = -\frac{106}{18}, p = -\frac{65}{18}, q = \frac{55}{18}$, 需要让判别式 $\Delta = -xy + (2x - y^2 - \frac{65}{18})^2 + (2x - y^2 - \frac{65}{18})(-x^2 + 2y + \frac{55}{18}) + (-x^2 + 2y + \frac{55}{18})^2 + \frac{103}{36} \leq 0$. 丢进软件求最小值, 大概在 $(x, y) \approx (2.44373, 1.40786)$ 最小值 $\Delta \approx -0.00002$. 可以取个近似的 $(x, y) = (\frac{22}{9}, \frac{141}{100})$. 如果不用判别式的话手凑还是很容易错过.

9.2 对称六芒星

对称的六芒星有特别简单的表示: $\forall u \in \mathbb{R}, \sum bc(a-b)(a-c)(a-ub)(a-uc) \geq 0$. 当 $u \geq 0$, 它有取等 $(1, 1, u)$ 等.

按照升一次再减伴随二次元的技巧，配方是：

$$\sum a \cdot f(a, b, c) = \sum c(u(a^2c - b^2c) - (u+1)(a^2b - ab^2))^2 + \frac{1}{2}abc \sum (b-c)^2(b+c - (u+1)a)^2$$

不过还有取巧的办法：看成关于 u 的二次函数计算 Δ 。计算得 $\Delta = -abc \prod (a-b)^2 \sum (4a^2b + 4ab^2 + abc) \leq 0$ 。

9.3 偏七次六芒星

虽然上面说，六次的六芒星乘 $s(a)$ 后 a^4b^3 与 a^3b^4 系数必然相等，但是不相等的时候方法是一样的。姑且称之为偏六芒星。

$$s(16a^5bc + 4a^4b^3 - 80a^4b^2c + 3a^4bc^2 + 7a^4c^3 + 64a^3b^3c - 14a^3b^2c^2) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 16 & -80 & 64 & 3 & 16 & 0 \\ & & 0 & 3 & -14 & -14 & -80 & 0 \\ & & & 7 & 64 & -14 & 64 & 4 \\ & & & & 4 & -80 & 3 & 7 \\ & & & & & 0 & 16 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

要消掉外圈 4 和 7，最暴力的方法是用根号，取伴随二次元为 a^2b 与 bc^2 系数比为 $2 : -\sqrt{7}$ 。当然这只是说说而已，一个温和的方法是拆两次，例如 $4 = 1^2 + 3 \times 1^2$, $7 = 2^2 + 3 \times 1^2$ ，先减个 $s(b(a^2b - 2bc^2 + abc - 3(a^2c - abc) + 3(ac^2 - abc)))2$ 剩下的 a^4b^3 与 a^3b^4 系数就相等了。答案：再取 $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ 。

另一个稍微暴力的方法是做一个很小的扰动。先找一个接近且略大的完全平方数 $\frac{7}{4} = 1.75 \approx (\frac{4}{3})^2 = z^2$ ，然后让 4 和 7 都减个 t 使得 $\frac{7-t}{4-t} = (\frac{4}{3})^2 = z^2$ ，解出来 $t = \frac{7-4z^2}{1-z^2} = \frac{1}{7}$ ，所以先减掉一个 $1/7s(b(a^2b - bc^2))2$ ，这一步减得很少只要不触犯取等就很难放过，剩下那两个系数就会变成可以开方的了（分别是 $4 - t = \frac{27}{7} = \frac{3}{7} \times 3^2$ 和 $7 - t = \frac{48}{7} = \frac{3}{7} \times 4^2$ ）。有点像小学的年龄问题。

9.4 八次六芒星

对着六次的六芒星乘 $s(ab)$ 会变成八次六芒星。同理不是所有八次六芒星是乘 $s(ab)$ 乘上来的。先看一下大概的结构。 $s(3a^4bc+a^3b^3-7a^3b^2c-4a^3bc^2+7a^2b^2c^2)s(ab) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & -6 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ & & 0 & 3 & -8 & 10 & -8 & 3 & 0 \\ & & & 0 & -3 & 10 & 10 & -6 & 0 \\ & & & & 1 & -6 & -8 & -3 & 1 \\ & & & & & 0 & 3 & 3 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

乍看上去八次比七次高了一次，剥掉最外圈也只会变成五次的，实际上应该剥掉旁侧的 $3a^5b^2c$ 与 $3a^5bc^2$ ，变成关于 ab, bc, ca 的四次式再套三元四次定理。答案：

$$s(3a^4bc+a^3b^3-7a^3b^2c-4a^3bc^2+7a^2b^2c^2)s(ab)-3abcs(c(a^2-b^2-0(ab-bc)-3/2(ac-bc))^2)$$

实际上，如果转 180 度，即做换元 $(a, b, c) \rightarrow (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ ，这个和七次的六芒星是等价的。

同理有偏八次六芒星，即 a^5b^2c 与 a^5bc^2 系数不相同的情况，方法类似。

9.5 七次六边形

七次六边形是一类有机会化归到七次六芒星的结构。它是指不含 $\sum a^7$, $\sum a^6b$, $\sum a^6c$ 的七次式。例如 $s(2a^5b^2-5a^5bc+8a^5c^2-5a^4b^3+21a^4b^2c-21a^4bc^2+a^4c^3-7a^3b^3c+6a^3b^2c^2) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ & 0 & -5 & 21 & -7 & -21 & -5 & 0 \\ & & 8 & -21 & 6 & 6 & 21 & 2 \\ & & & 1 & -7 & 6 & -7 & -5 \\ & & & & -5 & 21 & -21 & 1 \\ & & & & & 2 & -5 & 8 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

假设我们更贪婪一点, 配方法设法减掉一个东西一次性把外圈全部去掉。比如首先为了能够消掉凸包顶点的 2 与 8, 应该减的是

$$2s((a((a^2b-abc)-2(a^2c-abc)-x(bc^2-abc)+y(b^2c-abc)+z(ac^2-abc)+w(ab^2-abc)))^2))$$

只有 z, w 会影响外圈的系数, 为了消掉外圈中间的 -5 和 1 , 得到方程组 $z^2 + 2w = -\frac{5}{2}$ 和 $w^2 + 4z = \frac{1}{2}$, 相当于四次方程, 不好办。(如果允许近似小数的话则可以减完后相同地用三元四次定理判别式寻找 x, y)

于是可以退而求次, 不要求一次性把外圈削完, 让减掉之后剩下的是(偏)七次六芒星即可, 一个必要条件是外圈系数 -5 和 1 减完后仍然非负, 即 $z^2 + 2w \leq -\frac{5}{2}$, $w^2 + 4z \leq \frac{1}{2}$ 。选择余地还是有一点, 且还有备用的系数 x, y 可供调整。

这里可取 $x = y = 3$, $z = \frac{5}{3}$, $w = -\frac{8}{3}$, 刚好变成无偏的七次六芒星。减完后的七次六芒星较松, 可以直接减若干倍的 $s(a)s(ab(a-c)^2(b-c)^2)$ 变成四次。

$$9(s(2a^5b^2-5a^5bc+8a^5c^2-5a^4b^3+21a^4b^2c-21a^4bc^2+a^4c^3-7a^3b^3c+6a^3b^2c^2)-2s((a((a^2b-abc)-$$

$$2(a2c-abc)-3(bc2-abc)+3(b2c-abc)+5/3(ac2-abc)-8/3(ab2-abc))2))) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 27 & -57 & 9 & 21 & 27 & 0 \\ & & 0 & 21 & -2 & -2 & -57 & 0 \\ & & & 1 & 9 & -2 & 9 & 1 \\ & & & & 1 & -57 & 21 & 1 \\ & & & & & 0 & 27 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

9.6 习题

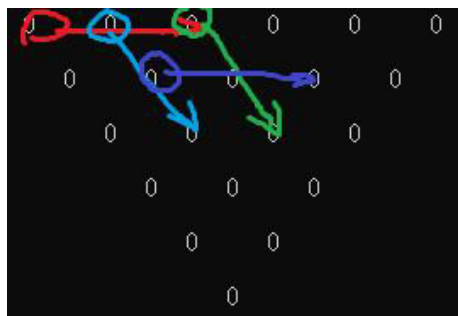
- (1) $s(6a4bc+4a3b3-13a3b2c-13a3bc2+16a2b2c2)$
- (2) $s(16a4bc+39a3b3-37a3b2c-118a3bc2+100a2b2c2)$
- (3) $s(20a5bc+4a4b3-31a4b2c-4a4bc2+4a4c3-46a3b3c+53a3b2c2)$
- (4) $s(16a5bc+3a4b3-77a4b2c+3a4bc2+3a4c3+72a3b3c-20a3b2c2)$
- (5) $s(a3b3+7a4bc-29a3b2c+12a3bc2+9a2b2c2)$
- (6) $81a2b2c2+4s(ab)2s(a)2-15s(a)3abc$
- (7) $s(72a5bc+24a4b3+156a4b2c-453a4bc2+44a4c3+176a3b3c-19a3b2c2)$
- (8) $s(18a4b4+9a5b2c+11a4b3c-66a3b4c+2a2b5c+10a4b2c2+16a3b3c2)$
- (9) $s(20a5bc+4a5c2+4a4b3-23a4b2c-15a4bc2+8a4c3-78a3b3c+80a3b2c2)$
- (10) $\sum \frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2} \geq \frac{1}{3} \sum a$

10 SOS

10.1 一般方法

SOS (sum of squares) 简单来说, 它给出了几个根据 S_a 、 S_b 、 S_c 来判定 $\sum S_a \cdot (b-c)^2$ 非负性的条件, 称其 sos 定理, 于是可以通过配成 $\sum S_a \cdot (b-c)^2$ 并验证 sos 条件的方式来给出证明。

在系数阵中, 从外往里拆 $[1, -2, 1]$ 就行



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

一般是按照这个顺序, 6 这个拆完剩的肯定是 0 了 ($a = b = c$ 能取等的话)。

10.2 例题

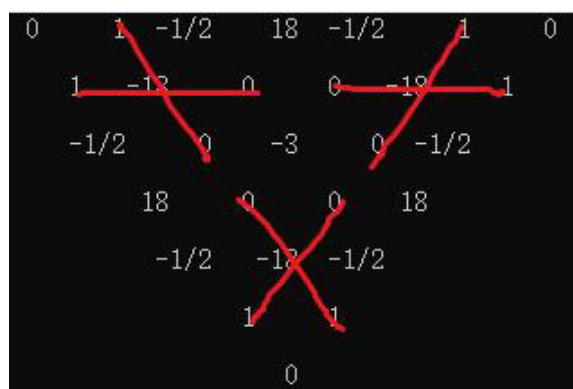
比如这个, 姑且只管配出 SOS, 不管配出来符不符合 SOS 定理的判定。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

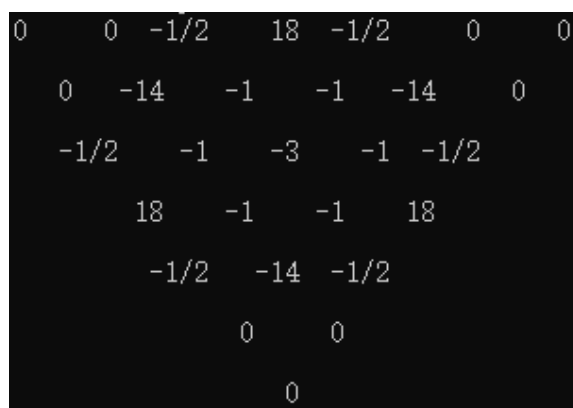
最外面的是 1，考虑把它弄掉。

那么为保对称性可以拆这几个，也就是 $\sum (a^4 + b^4)(a - b)^2$ ，为了把 1 拆掉所以取 $\frac{1}{2}$ 倍

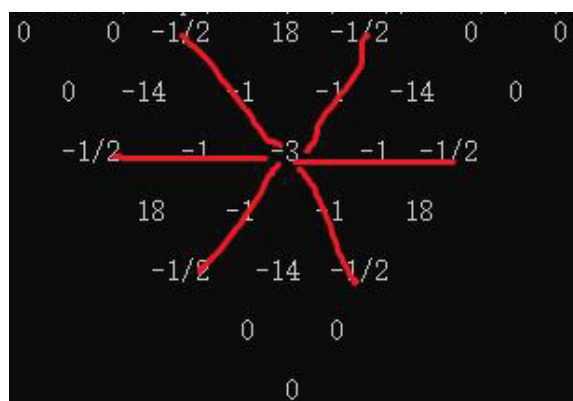
拆下来就剩这些了，下一个是那些 1。



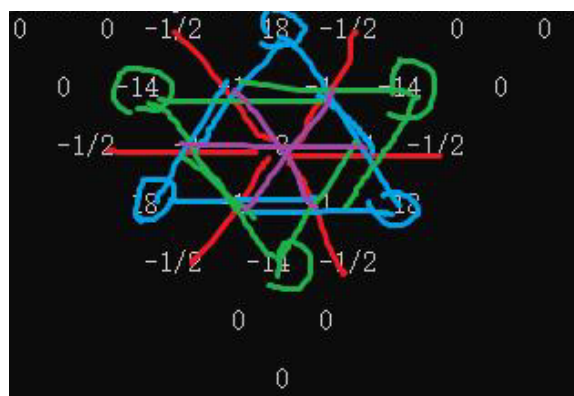
那么拆这些，也就是 $1 \sum (a^3 c + b^3 c)(a - b)^2$ 。



拆完剩这些，再搞这个 $-\frac{1}{2}$ 。



还是往里伸，那么按红蓝绿紫这个顺序拆到最后就行了。



14前面我们留下了这个问题，现在可以解决了：

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

方便看，先乘 2: $2 \left(\sum a^3 - 3abc \right) =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

然后 $2 \left(\sum a^3 - 3abc \right) - \sum a(a-b)^2 - \sum b(b-a)^2 =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{结束了}$$

也就是：注意到 $2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = \sum_{sym} a(a-b)^2 + \sum_{sym} c(a-b)^2 \geq 0$ 故得证。

* 当然也可以先拆 Schur, 过于显然。

10.3 习题

如果不是全相等取等 (比如 Jack Garfunkel), 用系数阵也由外向内也能类似地配出 $\sum S_a(a-3b)^2$.

用待定系数 Cauchy 处理 Garfunkel 不等式之后剩下的就是这个:

$$5 \prod (a+b)(5a+b+9c) - 16 \sum a \sum a(b+c)(c+a)(5b+c+9a)(5c+a+9b) \geq 0 \text{ 留做习题}$$

$$\text{答案: } \sum ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2 + 243 \sum a^3 b^2 c + 835 \sum a^3 b c^3 + 232 \sum a^4 b c + 1230 \sum a^2 b^2 c^2 \geq 0$$

11 其他

11.1 非齐次多项式

简单的倒是可以按次数分层，然后靠 $(a-1)^2$ 这种东西达到次数之间的相互照应，各层如果都非负的话当然就证完了，但情况肯定没这么好，所以可以用上下层来补到中间，比方说 $(a-1)^2$ 就是拿高层和低层的各一个 1 补到中间层，当然这样虽然简单但效益低，后面其实就是在说“每层都可以直接用简单的 SOS 显式完成”。

例 12 韦东奕不等式：设 $a, b, c > 0$ ，证明：

$$\sum (1-a)^2 \geq \sum \frac{a^2(1-b)^2(1-c)^2}{(a+bc)^2}$$

解 12 陈计老师的证明：

证明 配方得

$$\begin{aligned} & 64 \left[\sum (1-a)^2 \prod (a+bc)^2 - \sum a^2 (1-b^2) (1-c^2) (b+ca)^2 (c+ab)^2 \right] \\ &= \sum a(b-c)^2 ((1-2a)^2 (56a^2bc + a(a^2(32b^2+15bc+32c^2) + 17abc(b+c) + 98b^2c^2) \\ &+ abc(28a^3+4a^2(b+c) + 8a(8b^2+bc+8c^2) + 45bc(b+c)) \\ &+ 4b^2c^2(19a^3+13bc(b+c)) + 16b^3c^3(a(b+c) + b^2+bc+c^2)) \\ &+ abc(8a+13bc+19bc(b+c) + 12bc(b^2+c^2) \\ &+ 4bc(a(7b^2+26bc+7c^2) + (b+c)(12b^2+25bc+12c^2)) \\ &+ bc(32a^2(b^2+c^2) + 16(b^2+3bc+c^2)(a(b+c) + 2b^2+bc+2c^2)))) \geq 0 \quad (\text{详见公众号}) \end{aligned}$$

11.2 去根号

这里介绍如何去掉“三个根式的和”一类根号：要证 $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \geq \sqrt{D}$ 先讨论，倘若左边有两个之和已经不小于右边，则得证。否则我们只需考虑 $\prod (i\sqrt{A} + j\sqrt{B} + k\sqrt{C} + \sqrt{D})$ 的正负性，对 $i, j, k \in \{1, -1\}$ 求积（乘的 7 个都是正的），这个式子自然就没有根号了。（但是次数会变为原来八倍，所以并不实用）经过化简，

$$\prod (i\sqrt{A} + j\sqrt{B} + k\sqrt{C} + \sqrt{D}) = (2(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) - (A + B + C + D)^2)^2 - 64ABCD$$

再者，由于引入了乘的 7 项都是正的新条件，去根号后的式子不一定对所有 $a, b, c \geq 0$ 都成立。（所以说不如试试柯西和卡尔松或赫尔德）

12 总习题

- (1) $\sum a^2(a-b)(4b+c) \geq 0$
- (2) $\sum a^4 + 8 \sum a^2b^2 \geq 3 \sum a^2 \sum ab$
- (3) $\sum \frac{(a^2+bc)^2}{ab} \geq 4 \sum a^2$
- (4) $4(\sum a)^3 \geq 27(\sum a^2b + abc)$
- (5) $\sum \frac{a}{b} \sum \frac{a}{c} + 18 \geq 3 \sum a \sum \frac{1}{a}$
- (6) $\sum (a-b)(a^4 - 2b^3c + 3b^2c^2) \geq 0$
- (7) $\sum \frac{a^2}{(b-c)^2} \geq 2$
- (8) $\sum \frac{(a-b-c)^4}{bc} \geq \sum (3a-b-c)^2$
- (9) $\sum \frac{a^2}{(a+b)^2 + (a+c)^2} \geq \frac{3}{8}$
- (10) $\sum \frac{a}{b}(4a-3b-c)^2 \geq 10 \sum (a-b)^2$

13 其它结构

13.1

$$s(a(b+c)(b-c)4) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & -6 & 2 & 2 & -6 & 1 \\ & & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 2 & 0 \\ & & & & 0 & -6 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

13.2 积一型

先看一个引入. $s(a_6c^3+3a_5b^2c^2+3a_4b^4c-5a_5bc^3-4a_4b^3c^2+2a_3b^3c^3) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -5 & 0 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 3 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其实你可以把它摆正, 看起来舒服点 (其实是 $(x^3, y^3, z^3) = (a^2b, b^2c, c^2a)$ 这样的变换, 会使得整个阵仿射变换, 那么前后问题自然是等价的)

$$s(a^9+3a^3b^3(a^3+b^3)-5a^7bc-4a^4b^4c+2a^3b^3c^3) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

然后用两次基本模型搞定: $\sum (a^9+3a^3b^3(a^3+b^3)-5a^7bc-4a^4b^4c+2a^3b^3c^3)-\frac{1}{2}\sum a^3\sum (a^2+2ab)\sum (a-b)^2(a+b-2c)^2-\frac{1}{2}abc\sum \left(a^2+\frac{7}{3}ab\right)\sum (a-b)^2\left(a+b-\frac{7}{3}c\right)^2$

基本模型指这个:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sum (a^2+kab)\sum (a-b)^2(a+b-kc)^2 \quad (k \geq -1) \\ & = \sum a^6 + (k^3-3k)\sum a^3b^3 - 3k(k-1)\sum a^4bc - 3(k^3-3k^2+1)a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

只含有 $\sum a^6, \sum a^3b^3, \sum a^4bc, a^2b^2c^2$
有取等 $(a, b, c) = (1, 1, k-1)$.

也即 $abc = 1$ 条件下有关 $\sum a^2, \sum ab, \sum a$ 的不等式. 因此把它称为积一型. 其特点如这些例子

$$s(a^2+2ab)s((a-b)^2(a+b-2c)^2)/2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -6 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ & & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 & 2 \\ & & & & 0 & -6 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix}$$

$$s(a^2+3ab)s((a-b)^2(a+b-3c)^2)/2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -18 & 0 & 0 & -18 & 0 \\ & & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ & & & 18 & 0 & 0 & 18 \\ & & & & 0 & -18 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix}$$

$$s(a^2+4ab)s((a-b)^2(a+b-4c)^2)/2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 52 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -36 & 0 & 0 & -36 & 0 \\ & & 0 & 0 & -51 & 0 & 0 \\ & & & 52 & 0 & 0 & 52 \\ & & & & 0 & -36 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix}$$

其实积一型是存在通法的:

定理 若 $f(a, b, c) = \sum a^6 + u \sum a^3 b^3 + v \sum a^4 bc - 3(1+u+v)a^2 b^2 c^2 \geq 0$ 对于 $a, b, c \geq 0$ 恒成立, 那么必存在实数 $x \geq 1$ 使得

$$\begin{aligned} & \sum a^6 + u \sum a^3 b^3 + v \sum a^4 bc - 3(1+u+v)a^2 b^2 c^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum (a^2 + xbc) \sum (a-b)^2 (a+b-xc)^2 \\ &+ (u - (x^3 - 3x)) \sum (a^3 b^3 - a^2 b^2 c^2) + (v + 3x(x-1)) \sum (a^4 bc - a^2 b^2 c^2) \end{aligned}$$

且满足 $u - (x^3 - 3x) \geq 0, v + 3x(x-1) \geq 0$.

证明: 易见 $x^3 - 3x$ 在 $x \geq 1$ 时单调递增, 值域为 $[-2, +\infty)$. 若 $u > -2$, 取 x 为满足 $x^3 - 3x = u$ 的大于 1 的实根, 下只需证明 $v + 3x(x-1) \geq 0$. 实际上, 在上述恒等式中取 $a = 1, b = 1, c = x - 1$, 则 $0 \leq f(1, 1, x-1) = (v + 3x(x-1)) \sum (a^4 bc - a^2 b^2 c^2)$. (i) 若 $x \neq 2$, 则此时 $\sum (a^4 bc - a^2 b^2 c^2) = (x^2 - 1)(x - 2)^2 > 0$, 进而 $v + 3x(x-1) \geq 0$. (ii) 若 $x = 2$, 则 $u = x^3 - 3x = 2$, 下证 $v + 6 \geq 0$. 令 $g(t) = f(1, 1, t) = t^6 + t^4 v + 4t^3 - 3t^2 v - 9t^2 + 2tv + 4$, 则 $g'(t) = 6t^5 + 4t^3 v + 12t^2 - 6tv - 18t + 2v, g(1) = g'(1) = 0$. 因此必须有 $0 \leq g''(1) = 6v + 36$, 因此 $v + 6 \geq 0$.

若 $u = -2$, 则系数阵第一行系数和为零, 因此第二行和也需非负, 即 $v \geq 0$, 取 $x = 1$ 即可.

若 $u < -2$, 则系数阵第一行系数和为负数, 不成立. 综上证毕.

例 13 非负实数 a, b, c , 求证 $\sum (20a^6 - 26a^4 bc - 29a^3 b^3 + 35a^2 b^2 c^2) \geq 0$

解 13 除以 20 倍, 相当于 $u = -\frac{29}{20}$, 三次方程 $x^3 - 3x = u = -\frac{29}{20}$ 的大于 1 的实根约为 $x \approx 1.402$, 可以取偏小的近似值 $x = \frac{7}{5}$, 这样 $u - (x^3 - 3x) = \frac{3}{500}, v + 3x(x-1) = \frac{19}{50}$. 即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{20} \sum (20a^6 - 26a^4 bc - 29a^3 b^3 + 35a^2 b^2 c^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum \left(a^2 + \frac{7}{5} bc \right) \sum (a-b)^2 \left(a+b - \frac{7}{5} c \right)^2 + \frac{3}{500} \sum (a^3 b^3 - a^2 b^2 c^2) + \frac{19}{50} \sum (a^4 bc - a^2 b^2 c^2) \end{aligned}$$

另外积一型可以旋转 30 度把缝隙间的零压缩掉, 即换元 $(a, b, c) = (x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}, y^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}}, z^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}})$, 有取等 $(x, y, z) = ((k-1)^2, k-1, 1)$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum (x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} + k x^{\frac{2}{3}} y z^{\frac{1}{3}}) \sum (x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}})^2 (x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}} - k z^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}})^2 \quad (k \geq -1) \\ &= \sum x^4 y^2 + (k^3 - 3k) \sum x^2 y^3 z - 3k(k-1) \sum x^3 y^2 z - 3(k^3 - 3k^2 + 1) x^2 y^2 z^2 \end{aligned}$$

典例：非负实数 $abc = 1$, 求证

$$\sum a^2 \geq 3 + 18 \prod (a - 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -18 & 18 & 0 & 0 \\ & & 0 & 18 & -3 & -18 & 1 \\ & & & 0 & -18 & 18 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

13.3 六次无角对称

前面提到了对于任意 $u \in \mathbb{R}$, 有:

$$\begin{cases} \sum bc(b-c)^2(b+c-(u+1)a)^2 \geq 4 \prod (a-b)^2 \\ \sum bc(a-b)(a-c)(a-ub)(a-uc) \geq 0 \end{cases}$$

这两个不等式有一些共同点: 都是六次对称、都没有 $\sum a^6$ 项、都可以看成关于 u 的二次函数、都有特殊取等 $(1, 1, u)$ 。更强的版本是将两式中和一下:

定理 对于任意 $u, t \in \mathbb{R}$, $u \neq 0$,

$$\sum bc(b-c)^2(b+c-(u+1)a)^2 + \frac{(t-2)^2}{u^2} \sum bc(a-b)(a-c)(a-ub)(a-uc) \geq 2t \prod (a-b)^2$$

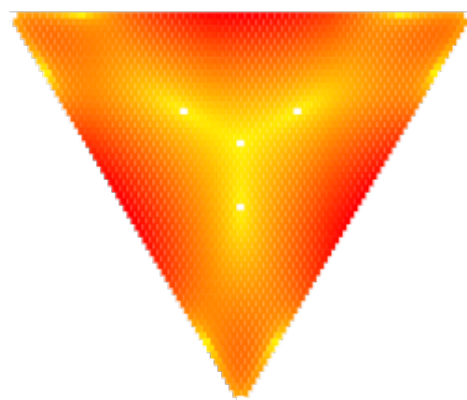
该式有特殊取等 $(1, 1, u)$, $\left(\frac{t \pm \sqrt{t^2-4}}{2}, 1, 0\right)$ ($t \geq 2$) 及轮换。

证明: 取 $\phi = \frac{t(u+1)-u^2-2}{u}$, 则

$$\begin{aligned} (\text{LHS} - \text{RHS}) \sum_{cyc} a &= \sum_{cyc} a(b-c)^2(a^2+b^2+c^2-tab-tac+\phi bc)^2 \\ &\quad + \frac{(t-2u-2)^2}{2u^2} \sum_{cyc} abc(b-c)^2(b+c-(u+1)a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

例 14 $\sum (2ab+2ac-bc)(b-c)^2(b+c-3a)^2 \geq 0$

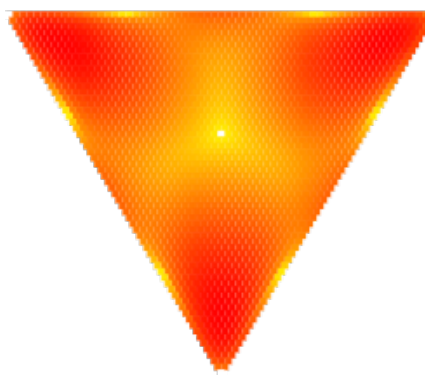
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -12 & 38 & -12 & 1 & 0 \\ 1 & 16 & -37 & -37 & 16 & 1 & \\ & -12 & -37 & 126 & -37 & -12 & \\ & 38 & -37 & -37 & 38 & & \\ & & -12 & 16 & -12 & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix}$$



解 14 发现有特殊取等 $(1, 1, 2)$, $(3 \pm 2\sqrt{2}, 1, 0)$ 及轮换, 故套用 $u = 2$, $t = 6$ 。

例 15 $s(a^5b + a^5c - 6a^4b^2 + 13a^4bc - 6a^4c^2 + 11a^3b^3 - 16a^3b^2c - 16a^3bc^2 + 18a^2b^2c^2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 \\ & 1 & 13 & -16 & -16 & 13 & 1 \\ & & -6 & -16 & 54 & -16 & -6 \\ & & & 11 & -16 & -16 & 11 \\ & & & & -6 & 13 & -6 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$



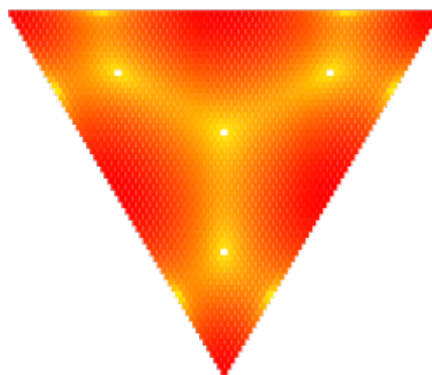
解 15 边上有特殊取等 $\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 1, 0\right)$, 但是对称轴上只有 $(1, 1, 1)$ 取等。可以固定 $t = 3$, 尝试改变 u 。尝试后发现原式不小于 $u = \frac{1}{2}$, $t = 3$ 的不等式。减掉后乘四倍是这样:

$$4(s(a^5b + a^5c - 6a^4b^2 + 13a^4bc - 6a^4c^2 + 11a^3b^3 - 16a^3b^2c - 16a^3bc^2 + 18a^2b^2c^2) - (s(bc(b-c)^2(b+c-(3/2)a)^2) + 4s(bc(a-b)(a-c)(a-(1/2)b)(a-(1/2)c)) - 6p(a-b)^2)) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 12 & -9 & -9 & 12 & 0 \\ & & 0 & -9 & 18 & -9 & 0 \\ & & & 0 & -9 & -9 & 0 \\ & & & & 0 & 12 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

例 16 $s(((a+b+c)^2 - 6((a-b)(a-c) - 3bc))(5a-b-c)^2(b-c)^2)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 12 & -186 & 472 & -186 & 12 & 2 \\ & 12 & 6 & 174 & 174 & 6 & 12 \\ & & -186 & 174 & -1440 & 174 & -186 \\ & & & 472 & 174 & 174 & 472 \\ & & & & -186 & 6 & -186 \\ & & & & & 12 & 12 \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$



解 16 虽然有特殊取等 $(1, 1, 4)$ 与 $(2 \pm \sqrt{3}, 1, 0)$, 但是有 $\sum a^6$ 项不能直接套定理。但是发现 $s(a(a^2-3a(b+c)+5bc))$ 刚好经过这些取等, 可以先减两份这个的平方, 把角去掉:

$$s(((a+b+c)2-6((a-b)(a-c)-3bc))(5a-b-c)2(b-c)2)-2s(a(a^2-3a(b+c)+5bc))2=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 24 & -192 & 432 & -192 & 24 & 0 \\ & 24 & -90 & 330 & 330 & -90 & 24 \\ & & -192 & 330 & -1998 & 330 & -192 \\ & & & 432 & 330 & 330 & 432 \\ & & & & -192 & -90 & -192 \\ & & & & & 24 & 24 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

剩下的就对应于 $u = 4, t = 4$ 。

习题

- (1) $s(9a^5b+9a^5c-54a^4b^2-35a^4bc-54a^4c^2+99a^3b^3+95a^3b^2c+95a^3bc^2-164a^2b^2c^2)$
- (2) $s(4a^5b+4a^5c-20a^4b^2-24a^4bc-20a^4c^2+33a^3b^3+56a^3b^2c+56a^3bc^2-89a^2b^2c^2)$
- (3) $s(ab(a^4+b^4)-6a^2b^2(a-b)^2)+abcs(a(a-b)(a-c))-6p(a^2)$
- (4) $\left(\sum a^2\right)^3 \geq 27a^2b^2c^2 + 27 \prod (a-b)^2$
- (5) $s(4a^6-a^3b^3-3a^2b^2c^2)-63p(a-b)^2$
- (6) $s(2a^6-a^4(b^2+c^2))-27p(a-b)^2$

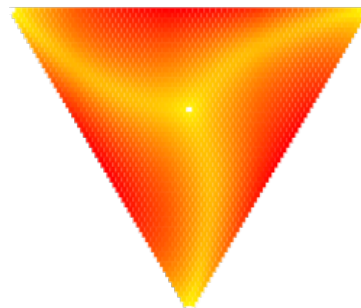
14 台风

* 以下台风是 Esto 做题时画的，都是台风，所以放一起。

14.1

$$2(s(ab)2s(a)-2abcs(a)^2-3abcs(ab))(3s(ab)s(a)-19abc)-3p(a-b)(s(ab)2s(a)+4abcs(a)^2+3abcs(ab))$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 1 & -53 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & 28 & -12 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -53 & 28 & 28 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & -12 & -53 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 21 & -9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



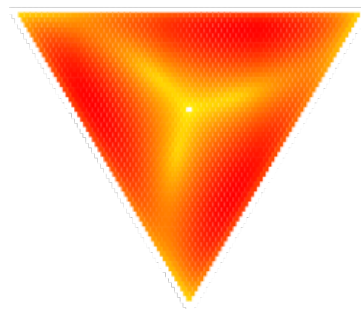
解答: 转 180° 看, 即换元 $(a, b, c) \rightarrow (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$, 其实就是七次六边形。如果不换元就相当于先削成偏八次六芒星。

$$2(s(ab)2s(a)-2abcs(a)^2-3abcs(ab))(3s(ab)s(a)-19abc)-3p(a-b)(s(ab)2s(a)+4abcs(a)^2+3abcs(ab))-6s(ab((a^2b-abc)^2)-3s(ab(ab^2-a^2b-bc^2-a^2c+2abc-2(b^2c-abc)+2(ac^2-abc))^2)-3s(ab((b^2c-abc)^2))$$

14.2

$$s(a^4c^2)s(a^2)+10s(ab)p(a)^2-13p(a^2)s(a^2)-s(a^2b^2-ab^3)^2-2s(ab(ab^2-b^2c+bc^2-abc)^2) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -22 & 14 & -22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 14 & 14 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -22 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



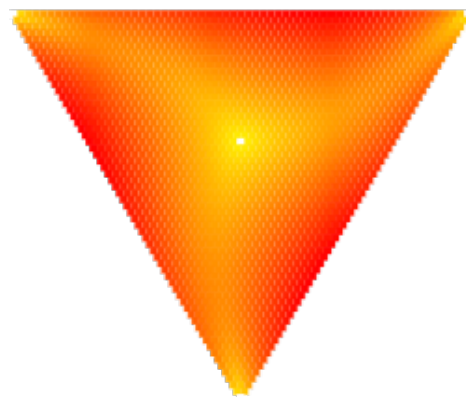
解答: 最外圈都是零, 可以除以 abc 变成五次。然后没有 $\sum a^5$ 的五次可以乘 $s(ab)$ 尝试七次六边形。反正最后用三元四次定理收尾。

$$s(4a^4c+2a^3b^2-22a^3bc+2a^3c^2+14a^2b^2c)s(ab)-4s(a(ab^2-a^2c-(b^2c-abc)+1/2(ac^2-abc))^2)-1/5s(ab(a-c)^2(b-c)^2)s(a)-1/5s(b(2a^2b-3bc^2+abc-5(a^2c-abc)+3(ac^2-abc))^2)$$

14.3

$$3p(a^2+3b^2)-4s(ab(b^2+3c^2)(c^2+3a^2))$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & -12 & 27 & 0 & 0 \\ & 0 & -12 & -4 & -36 & -12 & 0 \\ & & 27 & -36 & 84 & -4 & 9 \\ & & & -12 & -4 & -36 & -12 \\ & & & & 9 & -12 & 27 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$



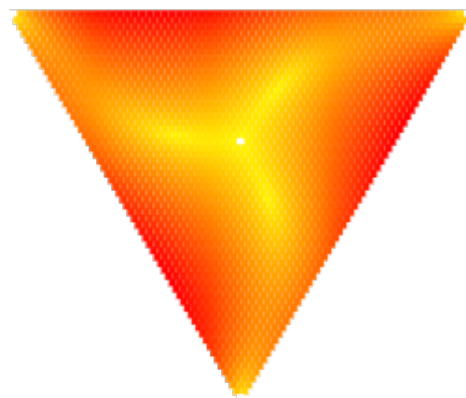
解答: 六次的正六边形可以乘 $s(a)$ 变成七次六边形。也可以直接操作先变成六次的六芒星再乘 $s(a)$ 。

$$(3p(a^2+3b^2)-4s(ab(b^2+3c^2)(c^2+3a^2)))-9s(a^2b-ab^2)^2-18s(ab^2-abc)^2s(a)-6s(c(2a^2b-a^2c-4ab^2+2abc+b^2c)^2)$$

14.4

$$1/5(18s(a^3(13b^2+5c^2)(13c^2+5a^2))-p(13a^2+5b^2)s(a)) \text{ 贴吧}$$

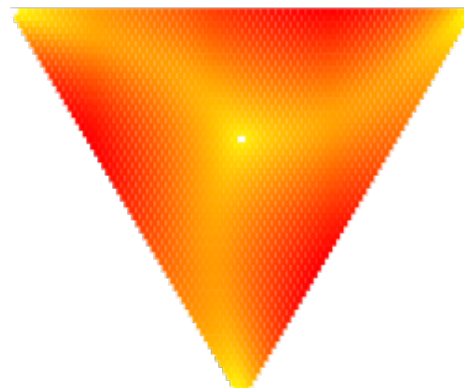
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 65 & 65 & -65 & 25 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -169 & 0 & -65 & 0 & 0 \\ & & 25 & -65 & 144 & 144 & -169 & 65 \\ & & & -65 & 0 & 144 & 0 & 65 \\ & & & & 65 & -169 & -65 & -65 \\ & & & & & 65 & 0 & 25 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$



14.5 困难的分式不等式

$$1/3(p(a^2+3b^2)s(b(b+3c)(c+3a))-p(a+3b)s(ab(b^2+3c^2)(c^2+3a^2)))$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -21 & 48 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -21 & -54 & -45 & -21 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 48 & -45 & 216 & -54 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -21 & -54 & -45 & -21 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -21 & 48 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



解答：先解决外圈变成六次，前面比较松。

$$1/3(p(a^2+3b^2)s(b(b+3c)(c+3a))-p(a+3b)s(ab(b^2+3c^2)(c^2+3a^2)))-s(a^2b-abc)^2s(a^2b-abc)-3s(ab^4(a^2-ab-c^2+ac)^2)-12s(a^3b^2(b-c)^4)-3s(ab^6(a-c)^2)$$

继而是转化为六芒星。

$$(s(17a^4b^2-30a^4bc+102a^4c^2-33a^3b^3-87a^3b^2c-96a^3bc^2+127a^2b^2c^2)-17s(a^2b-2ab^2+abc)^2-34s(ab^2-abc)^2)s(a)-35s(b(a^2b-bc^2-10/3(a^2c-abc)+4/3(ac^2-abc))^2)$$

15 多取等

如果有非平凡取等，要注意配方的时候每一项在取等点都是零。

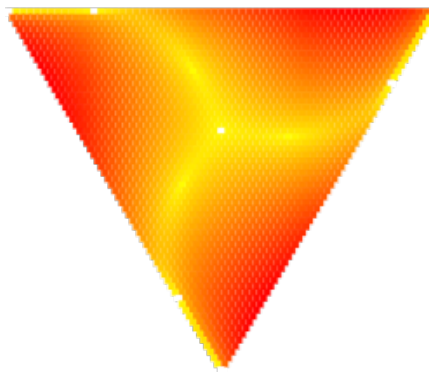
15.1 风车

例 17 证明: $\sum \frac{a}{b}(4a-3b-c)^2 \geq 20 \sum (a^2-ab)$ 。

有二次元 $\left(a^2 - b^2 + \frac{5}{4}(ab - ac) + 2(bc - ab)\right)$ 对应的取等以及 $(0, 4, 1)$ 轮换取等以及 $(1, 1, 1)$ 取等. 贴吧 MSE AOPS

$$s(a2c(4a-3b-c)2)-20s(a2-ab)p(a)=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -8 & 16 & 0 \\ & 16 & -44 & 35 & -44 & 0 \\ & & -8 & 35 & 35 & 1 \\ & & & 1 & -44 & -8 \\ & & & & 0 & 16 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$



解 17 显然必须升次才能做。可以考虑升到七次，然后用一个平方式把外圈剥掉，剩下的变成 abc 乘一个四次式。即，形如

$$\sum (a^2 + \lambda bc) (\text{LHS} - \text{RHS}) = \sum aF(a, b, c)^2 + abc \sum G(a, b, c)^2$$

升次后系数阵大概形如下图: $(s(a2c(4a-3b-c)2)-20abcs(a2-ab))s(a2)=$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -8 & 17 & -8 & 16 & 0 \\ & 16 & -44 & 51 & -88 & 35 & -44 & 0 \\ & & -8 & 35 & 28 & 28 & 51 & 1 \\ & & & 17 & -88 & 28 & -88 & -8 \\ & & & & -8 & 51 & 35 & 17 \\ & & & & & 1 & -44 & -8 \\ & & & & & & 0 & 16 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $F(a, b, c)$ 是三次式, 需要踩住二次元的四个取等。那么 F 一定是几个二次元的组合: $F(a, b, c) = (xa + yb + zc)f(a, b, c) + (ua + vb + wc)f(b, c, a)$, 其中 $f(a, b, c) = a^2 - b^2 + \frac{5}{4}(ab - ac) + 2(bc - ab)$ 是取等对应的二次元。这里不需要 $f(c, a, b)$ 的原因是 $f(c, a, b) = -f(a, b, c) - f(b, c, a)$ 。

此外, 凸包还需要 F 的 a^3 和 c^3 系数为零, 边界取等还要求 $F(1, 0, 4) = 0, F(4, 1, 0) = 0$ 。六个未知数, 四个方程, 只有两个自由度。如果要把凸包顶点的 a^5b^2 和 ab^6 系数 $1:16$ 配掉, 还需要 F 的 a^2b 与 b^3 系数比为 $1:\pm 4$ 。两种情况分别解得 $x:y:z:u:v:w = 0:-1:1:-2:5:0$ 与 $x:y:z:u:v:w = 0:-3:1:-2:-1:0$ 。由于 F 是齐次的, 最后一个自由度控制 F 的倍数。也就是说, F 只有两种可能:

F 是 $(2a^2b - 4a^2c - 10ab^2 + 16abc + ac^2 + 8b^3 - 9b^2c - 4bc^2)$ 的若干倍或 $(2a^2b + 12a^2c - 6ab^2 - 10abc - 3ac^2 - 8b^3 + 25b^2c - 12bc^2)$ 的若干倍。

最后尝试调整升次项 $\sum(a^2 + \lambda bc)$ 中的 λ 使得刚好减完外圈。最终得到 $\lambda = \frac{17}{4}$, 用后一个 F 的选择。总体来看, 因为这个不等式取等特别多, 所以我们的配方式的选择特别少, 几乎是固定的。

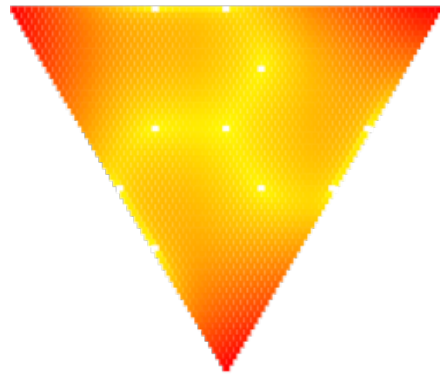
$$\begin{aligned} & \sum (4a^2 + 17bc) \left[\sum a^2c(4a - 3b - c)^2 - 20 \prod a \sum (a^2 - bc) \right] \\ &= \sum a (2a^2b + 12a^2c - 6ab^2 - 10abc - 3ac^2 - 8b^3 + 25b^2c - 12bc^2)^2 \\ &+ 14 \prod a \sum (4a^2 - 4b^2 - 3ab - 5ac + 8bc)^2 \end{aligned}$$

15.2 $s(a^2-ab)$ 的倍数

例 18 证明: $\sum (4a + b)(a - b)^2(a - 2b)^2 \geq \sum a(a^2 - bc)(4a^2 - 27bc)$ 。

有取等 $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (1, 2, 3)$ 及轮换。

$$\begin{bmatrix} 4 & -23 & 46 & -35 & 4 & 4 \\ & 4 & 31 & -27 & 31 & -23 \\ & & -35 & -27 & -27 & 46 \\ & & & 46 & 31 & -35 \\ & & & & -23 & 4 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix}$$



解 18 虽然热力图上有 10 个取等, 但是可以用四条直线将这十个点盖住: $a = 0$, $a - b - c = 0$, $2a - b - c = 0$, $a - 2b + c = 0$ 。实际上, 刚好就有:

$$\sum (a^2 - bc) (\text{LHS} - \text{RHS}) = \sum a(a - b - c)^2 (2a - b - c)^2 (a - 2b + c)^2$$

右边仅仅一项轮换和刚好是 $\sum (a^2 - bc)$ 的倍数。事实上可以给出推广:

推广 若齐次三元多项式 f 满足 $\sum f(a, b, c)(b - c) = 0$, 且 $g_i(a, b, c)$ ($i = 1, \dots, 3n + 1$) 是若干个满足 $g_i(1, 1, 1) = 0$ 的齐一次多项式 ($n > 0$)。那么, 有整除关系:

$$\sum (a^2 - bc) \mid \sum f(a, b, c) \prod_{i=1}^{3n+1} g_i(a, b, c)$$

证明 由于 $\sum (a^2 - bc)$ 可以在复数域因式分解, 设 ω 为三次单位根, 只需证明

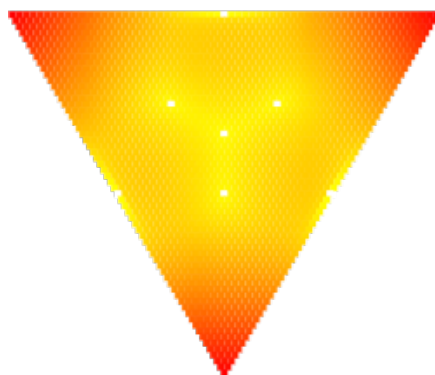
$$a + \omega b + \omega^2 c \mid \sum f(a, b, c) \prod_{i=1}^{3n+1} g_i(a, b, c)$$

注意 $g_i(a, b, c)$ 必定可表为 $\lambda_i(a + \omega b + \omega^2 c) + \mu_i(b - c)$, 即在模的意义下 $g_i(a, b, c) \equiv b - c$ 。同理也同余 $a - b$ 或 $c - a$ 。因此, $\text{RHS} \equiv \sum f(a, b, c)(b - c) \prod (a - b)^n = 0$ 。证毕。
本题是 $f(a, b, c) = a(a - b - c)^2$ 以及 $n = 1$ 的特例。

练习 16 证明: $\sum a(a - b - c)^2(a - b)(a - c) \geq 0$ 。

有取等 $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 2)$ 及轮换。

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ & -3 & 9 & -8 & 9 & -3 \\ & & 2 & -8 & -8 & 2 \\ & & & 2 & 9 & 2 \\ & & & & -3 & -3 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$



答案 16

$$\sum a(a - b - c)^2(a - b)(a - c) \sum (a^2 - bc) = \sum a(a - b - c)^2(a - b)^2(a - c)^2$$

注: 用舒尔不等式那章的“舒尔不等式加强”里面的提取 $\prod (a - b)^2$ 的技巧, 也可以得到该式, 因为 $\sum (a^2 - bc) = \sum (a - b)(a - c)$ 。

16 一些问题

和系数阵有关或无关的，有答案或没答案的零散问题，暂时还没有归类。

16.1

求证： $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3xyz} + \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{x + y + z} \geq 2 \quad (x, y, z > 0)$

证明： $(x, y, z) = (a^3, b^3, c^3)$

$$\begin{aligned} & xyz(x + y + z) \left[\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3xyz} + \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{x + y + z} - 2 \right] \\ &= \sum a^4(a^4 - b^4)(a^4 - c^4) + \sum c^8(a^2 - b^2)^2 + \sum c^3(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)^2 \\ &\quad + 2a^2b^2c^2 \left[\sum a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + \sum c^4(a - b)^2 \right] \end{aligned}$$

16.2

$a, b, c \geq 0$ 且至多一个为零，求证 $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \sum \frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{12}{(a + b + c)^2}$

通分后的系数是这样：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 10 & -14 & 10 & -6 & 2 & 1 \\ & 2 & 2 & 10 & 10 & 10 & 10 & 2 & 2 \\ & & -6 & 10 & -27 & 22 & -27 & 10 & -6 \\ & & & 10 & 10 & 22 & 22 & 10 & 10 \\ & & & & -14 & 10 & -27 & 10 & -14 \\ & & & & & 10 & 10 & 10 & 10 \\ & & & & & & -6 & 2 & -6 \\ & & & & & & & 2 & 2 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

注意到 ab 边上总和为 0，所以先 Schur 一下，再在三条边上各自配，中间 -27 随便搞，我这个配的不是很好看…仔细一看其实上来拿 $\sum a^6(a - b)(a - c)$ 更舒服。其实这里有个小知识点，由于 $abc=110$ 取等，所以角上这个 1 要小心用，得保证 $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ 和 $(1, 0, 1)$ 时候都取得到等，为此我们就可以考虑 Schur 了，因为众所周知 Schur 的取等有 111, 110, 101, 011 四个。

$$s((a^2+b^2)(a^2+c^2))s(a^2)s(a)^2+p(a^2+b^2)s(a)^2-12p(a^2+b^2)s(a^2)-s(a^6(a-b)(a-c))=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 10 & -14 & 10 & -6 & 3 & 0 \\ & 3 & 1 & 10 & 10 & 10 & 10 & 1 & 3 \\ & & -6 & 10 & -27 & 22 & -27 & 10 & -6 \\ & & & 10 & 10 & 22 & 22 & 10 & 10 \\ & & & & -14 & 10 & -27 & 10 & -14 \\ & & & & & 10 & 10 & 10 & 10 \\ & & & & & & -6 & 1 & -6 \\ & & & & & & & 3 & 3 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

那么拿完 $\sum a^6(a-b)(a-c)$ 之后是这样，三条边上刚好是 $[3, -6, 3][7, -14, 7][3, -6, 3]$ 合起来，中间 -27 真的就随便搞了：

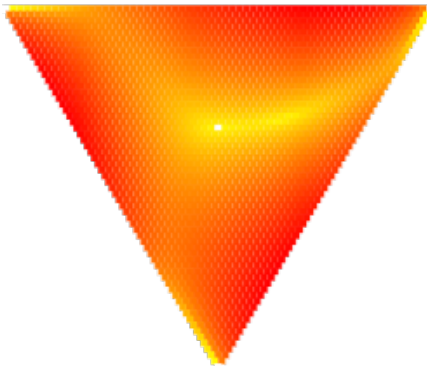
$$\begin{aligned} & s((a^2+b^2)(a^2+c^2))s(a^2)s(a)^2+p(a^2+b^2)s(a)^2-12p(a^2+b^2)s(a^2)-s(a^6(a-b)(a-c)) \\ & -s(ab(3a^4+7a^2b^2+3b^4)(a-b)^2)-10p(a)s(a^2)s(a(b-c)^2)= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 33 & 2 & 33 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 33 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

16.3

已知 $a, b, c > 0$, 求证: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$. [链接](#)

证明: 除了 $(1, 1, 1)$ 取等外, 还有 $\left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 的取等。后者可以用 $ab - c^2 = 0$ 或 $a + c - b = 0$ 的关系得到压住取等的配方式。通分后系数阵如下。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ & & 1 & -2 & -2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$


可见有个纵向的 $[1, -2, 1]$, 对应于 $b(ab - c^2)^2$ 。减掉后无法继续, 遂考虑升次。乘 $a + c$ 后
可见 $[1, -4, 6, -4, 1]$ 的端倪。把多余的那纵列再用 $b^2(ab - c^2)^2$ 减掉即可。

$$(s(a^3c)s(a)-p(a)s(a)^2-4(a-b)^2p(a)-b(ab-c^2)^2)(a+c)=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & 2 & -6 & 6 & -4 & 0 \\ & & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$abc(a+c) \sum a \left[\sum \frac{a^2}{b} - \sum a - \frac{4(a-b)^2}{\sum a} \right] = b(ab - c^2)^2(a+b+c) + ac(a-b)^2(a+c-b)^2$$

证明 2:

$$\sum \frac{a^2}{b} - \sum a = \sum \frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{(\sum |a-b|)^2}{\sum a} \geq \frac{4(a-b)^2}{\sum a}$$

16.4 简单六次对称

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ & -2 & 4 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ & & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ & & & 2 & -1 & -1 & 2 \\ & & & & -1 & 4 & 1 \\ & & & & & -2 & -2 \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

首先注意到 111,110 都取等。考虑到这是六次的，而且角上是 1，次角负的不多，所以先砸个 $\left[\sum a(a-b)(a-c)\right]^2$ 下去，这是一个好用的结构。这里是只减了一份，减两份应该也行。

$$s(2a^6-2a^5(b+c)-a^4(b^2+c^2)+2a^3b^3+4a^4bc-a^3bc(b+c))-s(a(a-b)(a-c))^2=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -4 & 5 & 5 & -4 & 0 \\ & & 0 & 5 & -15 & 5 & 0 \\ & & & -2 & 5 & 5 & -2 \\ & & & & 0 & -4 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

现在我们有充裕用六阶的 Schur $\sum a^4(a-b)(a-c)$ 了。如果一开始直接减两倍的这个舒尔则会使 a^5b 系数为负。

$$s(2a^6-2a^5(b+c)-a^4(b^2+c^2)+2a^3b^3+4a^4bc-a^3bc(b+c))-s(a(a-b)(a-c))^2-s(a^4(a-b)(a-c))=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & -5 & 5 & 5 & -5 & 1 \\ & & 0 & 5 & -15 & 5 & 0 \\ & & & -2 & 5 & 5 & -2 \\ & & & & 0 & -5 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

减掉六阶 Schur 之后变这样, 可以看出现在难搞的是这个 -5 , 与此同时必须保证 110 时的取等, 边上这个 $[1, 0, -2, 0, 1]$ 看上去不太好动, 但其实还是有油水可以榨的, 因为 $[1, 0, -2, 0, 1] = [0, 4, -8, 4, 0] + [1, -4, 6, -4, 1]$, 所以拿个 $[0, 4, -8, 4, 0]$ 依然不会死掉, 因此这里是可以考虑拿 4 个 $(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$ 。这个 $\prod(a-b)^2$ 的系数阵很重要, 是:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ & & 1 & 2 & -6 & 2 & 1 \\ & & & -2 & 2 & 2 & -2 \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

拿 4 个自然是稳的, 但实际上拿 $\frac{5}{2}$ 个就够了。

16.5 容易伪证

设 $a, b, c > 0$ 且 $a + b + c = 3$, 求证: $\sum \frac{a^2}{b} \leq \sum \frac{a}{b^2}$. 知乎链接 知乎 2 贴吧 AOPS

$$\sum \frac{a}{b^2} \left(\sum a \right)^2 - 9 \sum \frac{a^2}{b} = \sum \frac{(a-b)^2(ab-2c^2)^2}{a^2bc^2} + \sum \frac{(a+c)(a-b)^2}{ab}$$

16.6

设 $a \geq b \geq c > 0$, 证明: $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + abc \geq a + b + c + 1$.

证明: (文武光华 田开斌)

$$6abc(\text{LHS} - \text{RHS}) = 2 \sum a^2(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + 2 \sum a^2\sqrt{bc}(\sqrt{bc} + 2)(\sqrt{bc} - 1)^2 \\ + \sum a(b - c)^2 + 3(a - b)(a - c)(b - c) \geq 0$$

证明 2: (单增 链接) 原式等价于证明 $a^2b + b^2c + c^2a + a^2b^2c^2 \geq abc(a + b + c + 1)$ (*).

引理 1: 当 $a \geq b \geq c$, $a^2b + b^2c + c^2a \geq a^2c + c^2b + ab^2$.

证明: $\text{LHS} - \text{RHS} = (a - b)(b - c)(a - c) \geq 0$.

引理 2: $b, c \geq 0$, 则 $b^2c^2 - 3bc + (b + c) \geq 0$.

证明: 设 $t = \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$, 则 $b^2c^2 - 3bc + (b + c) \geq t^4 - 3t^2 + 2t = t(t - 1)^2(t + 2) \geq 0$.

回到原题, (*) 式左边减右边等于

$$\frac{1}{3} \sum a^2(b^2c^2 - 3bc + b + c) + \frac{1}{3} [(a^2b + b^2c + c^2a) - (a^2c + b^2a + c^2b)] \\ + \frac{1}{3} (a^2b + b^2c + c^2a - 3abc) \geq 0$$

16.7

已知 $\sum ab = 1$, 求证 $\sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$

条件包含 2 次和 0 次, 结论化整之后包含 3 次和 2 次, 所以为了齐次化只好把结论平方, 也就是证明 $4 \sum ab \left[\sum (a+b)(a+c) \right]^2 - 25 \prod (a+b)^2 \geq 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & -6 & -1 & 4 & 0 \\ & 4 & 2 & 14 & 14 & 2 & 4 \\ & & -1 & 14 & 38 & 14 & -1 \\ & & & -6 & 14 & 14 & -6 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & 4 & 4 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

三条边上各自解决, 中间全是正的, 松但是 $\frac{5}{2}$ 是最佳系数, 因为是 110 趋于取等。本题显然弱于伊朗 96。

16.8

$a, b, c > 0$, 证明: $\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{9a}{b+c} + \frac{16bc}{(b+c)^2} \geq 6$ 然后会发现 $(a, b, c) (1, 3, 0), (1, 0, 3), (0, 1, 1)$ 这三个取等, 但 $(1, 1, 1)$ 不是取等

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 & -5 & 1 \\ & 9 & 22 & 10 & -4 \\ & & 3 & 10 & 6 \\ & & & -5 & -4 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

与此同时发现 $f(0, b, c)$ 就是 $(b-c)^4$, 那么一开始要拿的平方就很明白了

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ & -3 & -2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -6 & 1 & 0 \\ & 9 & 4 & 4 & 0 \\ & & -6 & 4 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

拿完剩下这些, 自然而然地拆 $(3a - b - c)^2$, 即

$$\begin{aligned} & \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{9a}{b+c} + \frac{16bc}{(b+c)^2} - 6 \\ &= \frac{((b-c)^2 - 3a(b+c))^2 + a(b+c)(3a-b-c)^2 + abc(16a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)^2} \end{aligned}$$

其实直接 $ab(3a-b)^2 + ac(3a-c)^2 + 4abc(a+b+c)$ 也行。

16.9 九次稀疏对称

(Ji) 正数 a, b, c 满足 $abc = 1$, 则 $\sum (b+c)^3 \geq 8 \sum a^2$ 。链接

解答:

$$\begin{aligned} \sum (a^3 + b^3)^3 - 8abc \sum a^6 &= \sum a^3 \left[\sum (a^3 - abc) \right]^2 + \sum a(a^2 - bc)^4 \\ &\quad + abc \sum \left(a^2 + \frac{9}{4}bc \right) \sum (a-b)^2 \left(a+b - \frac{9}{4}c \right)^2 \\ &\quad + \frac{15}{8}a^2b^2c^2 \sum (a^3 - abc) + \frac{55}{32}abc \sum (a^3b^3 - a^2b^2c^2) \end{aligned}$$

其中 $\sum \left(a^2 + \frac{9}{4}bc \right) \sum (a-b)^2 \left(a+b - \frac{9}{4}c \right)^2$ 是前文的积一型。

$s(a^3)s(a^3-abc)^2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最后代码是 $s((a^3+b^3)^3)-8p(a)s(a^6)-s(a^3(a^3+b^3-3abc+c^3)^2)-s(a(a^2-bc)^4)-p(a)s(a^2+9/4ab)s((a-b)^2(a+b-9/4c)^2)-15/8p(a^2)(s(a^3)-3abc)-55/32abc(s(a^3b^3)-3p(a^2))$

16.10 小风车

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} \text{ 知乎链接 AOPS 加强}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -7 & 3 & -7 & 1 \\ & & 1 & 3 & 3 & 2 \\ & & & 2 & -7 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

以 a^4b 角位上的 1 作桩，看能配什么方出来，红点的是桩

为了消去角，决定让被平方式是这个样子，那么原来 2 的位置剩下的是 $2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - x^2$ 考虑图省事把这个 2 也消掉，那么应该 $x = 2$ ，也就是说我们提的是 $\sum b(a-b)^2(a-2c)^2$ 。
 $s(a^2b(a+b)^2) - abcs(7a^2-3ab) - s(b(a-b)^2(a-2c)^2) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

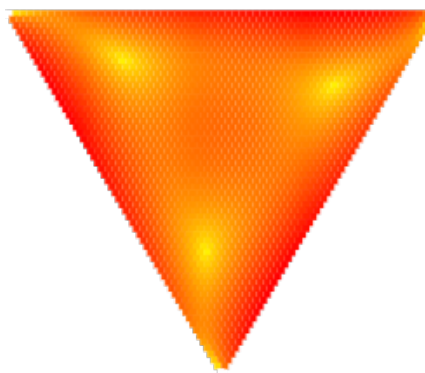
减完确实做完了。

综上，原不等式等价于 $\sum b(a-b)^2(a-2c)^2 + \frac{1}{2}abc \sum (a-b)^2 \geq 0$

16.11 类似风车

$$s(2a^3b^2+2ab^4-17a^3bc+16a^2b^2c)=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ & 2 & -17 & 16 & -17 & 0 \\ & & 0 & 16 & 16 & 2 \\ & & & 2 & -17 & 0 \\ & & & & 0 & 2 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$



$$s(2a^3b^2+2ab^4-17a^3bc+16a^2b^2c)s(a)-2(p(a-b)+abc)^2-2s(ab(b^2-3bc-ab+2ac))^2-4(s(ab^2)-5abc)^2-s(ab(2ab-3ac-bc+c^2))^2$$

16.12

$$a, b, c > 0, \text{ 求证: } \frac{3a^4 + a^2b^2}{a^3 + b^3} + \frac{3b^4 + b^2c^2}{b^3 + c^3} + \frac{3c^4 + c^2a^2}{c^3 + a^3} \geq 2(a + b + c) \quad (\text{韩京俊})$$

$$\text{证明: 注意到 } \sum a^3b^3(a-b)^4 + \left(\sum (a^3b^2 - a^2b^3 + a^3bc - a^2b^2c) \right)^2 + \\ \sum a^4b^2(2ab - b^2 - ac)^2 + \sum ab(a^2b^2 - \frac{5}{2}ab^2c + \frac{1}{2}a^2bc - a^2c^2 - b^2c^2 + 3abc^2)^2 + \\ \frac{1}{2}a^2b^2c^2 \sum (a^2 - b^2 - \frac{35}{12}(ca - ab) + \frac{19}{12}(bc - ab))^2 + \frac{5}{96}a^2b^2c^2 \sum (a-b)^2c^2 \geq 0 \text{ 故得证.}$$

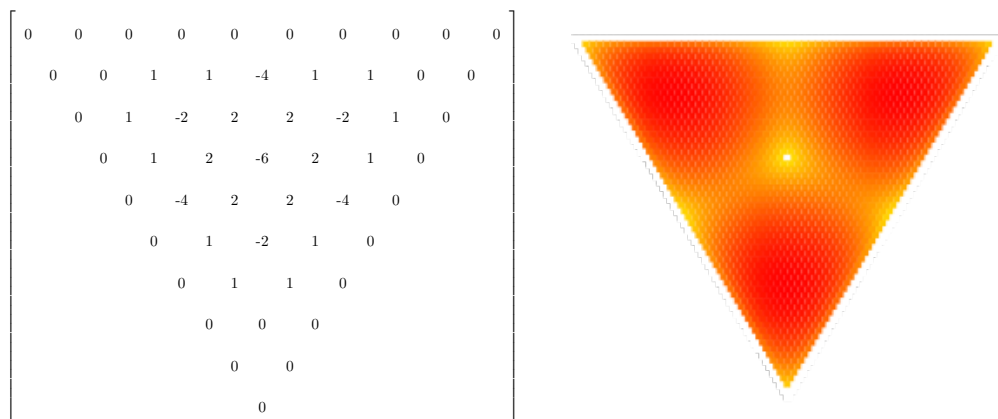
$$s((b^3+c^3)(c^3+a^3)(3a^4+a^2b^2))-2s(a)p(a^3+b^3)-s(ab(a^3b-2a^2b^2+ab^3)^2)-s(a^3b^2-a^2b^3+a^3bc-a^2b^2c)^2- \\ s((2a^3b^2-a^2b^3-a^3bc)^2)-s(ab(a^2b^2-5/2ab^2c+1/2a^2bc-a^2c^2-b^2c^2+3abc^2)^2)-1/2p(a)^2s((a^2-b^2-35/12(ac-ab)+19/12(bc-ab))^2)-5/96p(a)^2s(c^2(a-b)^2) \text{ 贴吧}$$

16.13

$$\text{已知 } a, b, c \geq 0 \text{ 求证: } \frac{ab}{c^2 + ab} + \frac{bc}{a^2 + bc} + \frac{ca}{b^2 + ca} \geq \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 1$$

$$\text{本题等价: } \frac{(a+b)^2}{c^2 + ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2 + bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2 + ca} \geq 6 \text{ 贴吧}$$

$$s(ab(a^2+bc)(b^2+ca))p(a+b)-(4abc+p(a+b))p(c^2+ab)=$$



最外一圈都是零, 所以是 abc 的倍数, 只需配里面的六次式。用 $ab \cdot \text{Schur}_4$ 或 $\sum ab(a-b)^4$ 均可。

$$s(ab)s(a^2(a-b)(a-c))+2p(a-b)^2+2abcs(a(a-b)(a-c))+abcs(a^3-abc)$$

16.14

$a, b, c \in \mathbb{R}_+$. 求证: $(ab + bc + ca)^3 \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ & & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ & & & -3 & -1 & -1 & -3 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & 2 & 2 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

注意到 $\left(\sum ab\right)^3 - (a+b+c)^3 \prod(b+c-a) =$
 $abc \sum (a-b)(a^2-b^2) + \frac{1}{2} \sum (a^2-b^2)(a^4-b^4) + \frac{1}{2} \sum ab(a-b)(a^3-b^3) + \frac{3}{2} \sum ab(a^2-b^2)^2 \geq 0$
 故得证.

16.15

已知: $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, 证明: $(a+b+c)^3(a^3+b^3+c^3+abc) \geq 36abc(a^3+b^3+c^3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ & 3 & -29 & 6 & 6 & -29 & 3 \\ & & 3 & 6 & 6 & 6 & 3 \\ & & & 2 & 6 & 6 & 2 \\ & & & & 3 & -29 & 3 \\ & & & & & 3 & 3 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

注意到 $\sum a^3 \left(abc + \sum a^3 \right) - 36abc \sum a^3 =$
 $\sum a^4(a-b)(a-c) + 4 \sum ac(a-b)^4 + 4 \sum bc(a-b)^4 + 3 \sum c^4(a-b)^2 + 2 \sum b^2c^2(a-b)(a-c) \geq 0$
 故得证.

16.16

$$a^4 + b^4 = 2, ab^2 + a^2 + a^2b + b^2 \leq a^2b^2 + a^3 + b^3 + ab$$

证明: 有恒等式

$$\text{RHS} - \text{LHS} = \frac{1}{2(a+b)} \left[(a^4 + b^4 - 2) + \frac{F}{a+b} \right]$$

其中

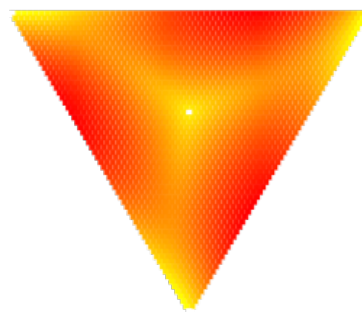
$$\begin{aligned} F &= a(a^2 - a + b - 1)^2 + b(b^2 - b + a - 1)^2 + (a+b)(a-1)(b-1)^2 \\ &\quad + (a+b-2)^2(2a^2b^2 + a^2b + ab^2 + 2ab) \geq 0 \end{aligned}$$

16.17 十二次不等式

$$(\text{Nguyen Huy Tung}) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{9(a^3 + b^3 + c^3)}{(a+b+c)^3}}$$

$$(s(a2c))^3(s(a))^3-243p(a3)(s(a3))=$$

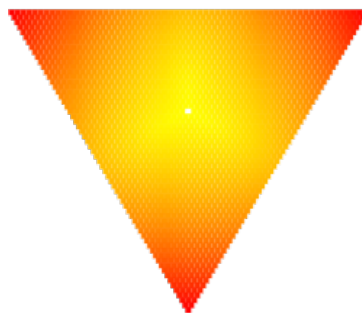
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 12 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 18 & 24 & 21 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 12 & -218 & 36 & 36 & -218 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 21 & 36 & 45 & 36 & 18 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 24 & 36 & 36 & 24 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 18 & -218 & 21 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 12 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



16.18 星都放过了

$$s(a7-3a5bc+2a3b2c2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

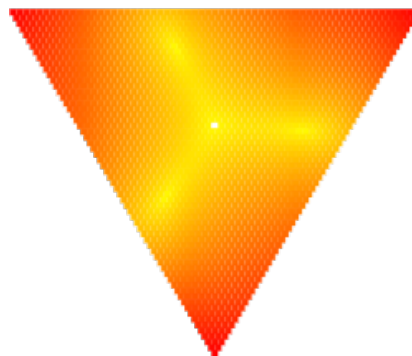


$s(a7-3a5bc+2a3b2c2)-s(a)s(a-b)(a-c))2-3s(a)p(a-b)2-s(a(b-c)6)-11/2abcs((a-b)2(a+b-19/11c)2)-1/11s(abc3(a-b)2)$ 此处的 $\frac{19}{11}$ 实际上等价于套三元四次定理。因为减掉前三项之后, 剩下的部分就是 abc 的倍数了, 相当于只需证明一个四次式。[错误示例] 先提 Schur: $s(a5(a-b)(a-c))$

16.19 Vasile 取等

16(s(a2))3-9s((a3+3b2c)2) 链接 AOPS 链接 非常强的加强链接

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -33 & 0 & 48 & 0 & 7 \\ & 0 & 0 & -54 & 0 & 0 & 0 \\ & & 48 & 0 & 96 & -54 & -33 \\ & & & 0 & -54 & 0 & 0 \\ & & & & -33 & 0 & 48 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 7 \end{bmatrix}$$



证明: 含有 Vasile 取等, 对应的二次元是 $(a^2 - b^2 + (ab - ac) + 2(bc - ab))$ 。原式一定可以写成 $\sum F(a, b, c) (a^2 - b^2 + (ab - ac) + 2(bc - ab))^2$ 。简单地待定系数后, 解得原式 = $s((8a^2 - b^2 + 11c^2 + 3ab + 9bc + 15ca)(a^2 - b^2 + (ab - ac) + 2(bc - ab))^2)$ 。

然后用 SOS 定理: 若 $\sum_{cyc} f(a, b, c) = 0$, 则

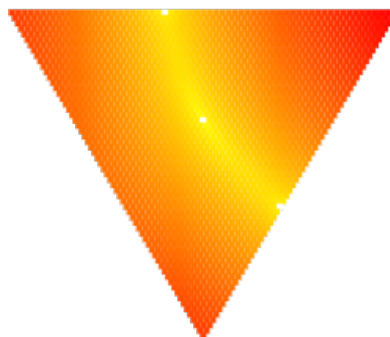
$$2 \sum_{cyc} x \sum_{cyc} x f(a, b, c)^2 = (xy + yz + zx) \sum_{cyc} f(a, b, c)^2 + \sum_{cyc} [yf(b, c, a) - zf(c, a, b)]^2$$

整理得 $18s(2a^2 + 3ab)s(7a^6 - 33a^4b^2 + 48a^4c^2 - 54a^3b^2c + 32a^2b^2c^2) = 3s(23a^4 + 102a^3b + 90a^3c + 154a^2b^2 + 306a^2bc)s((a^2 - b^2 + (ab - ac) + 2(bc - ab))^2) + s((8a^4 + 6a^3b - 15a^3c - 8a^2b^2 - 3a^2bc - 11a^2c^2 - 9ab^3 - 24ab^2c + 27abc^2 - 7b^4 - 6b^3c + 19b^2c^2 + 24bc^3 - c^4)^2)$
另外该配方可推出原不等式对于实数 a, b, c 成立。

16.20 非对称不等式

$$9s(a^3) - 3s(a)s(ab) - 5s(a)(a-c)^2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & -3 & 9 \\ & 2 & 1 & -3 \\ & & 2 & -8 \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$



$$(9s(a^3)-3s(a)s(ab)-5s(a)(a-c)^2(a+c)-(a-c)^2(2a-3b+2c)^2-ab(2a-3b+c)^2-bc(a-3b+2c)^2-6ac(a-2b+c)^2$$

16.21 89 不等式

对于 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 求证 $8\left(\sum a^2\right)^3 \geq 9\prod(a+b)\sum a^3$ 。注意是对于实数 a, b, c 的问题。
[百度贴吧链接](#) [链接 2](#)

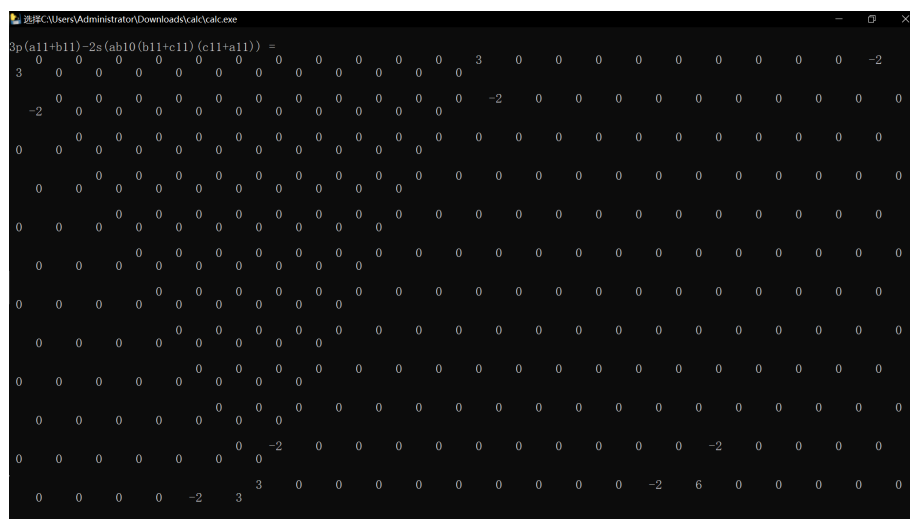
$$\begin{bmatrix} 8 & -9 & 15 & 0 & 15 & -9 & 8 \\ & -9 & -18 & -9 & -9 & -18 & -9 \\ & & 15 & -9 & 48 & -9 & 15 \\ & & & 0 & -9 & -9 & 0 \\ & & & & 15 & -18 & 15 \\ & & & & & -9 & -9 \\ & & & & & & 8 \end{bmatrix}$$

由于是实数, 不能直接把 $\sum a^6$ 扔了只留下 $\sum a^5b, \sum a^5c$. 可以用常用结构慢慢拆: 先拿 $\frac{9}{2}(\sum a(a-b)(a-c))^2$ 把 $\sum a^5b, \sum a^5c$ 清空. 然后用积一型 $(\sum a)^2 \sum (a-b)^2(a+b-2c)^2$ 把角落 $\sum a^6$ 清空, 这样子只剩下中间的正六边形. 然后拿若干 $\sum a^4(b-c)^2$ 把 a^4bc, a^3b^3 的系数调到相等, 接着用 $\prod(a-b)^2$ 把这两个系数拿完. 之后用 $\sum a^2(b-c)^4$ 把 a^3b^2c, a^2b^3c 系数清掉. 最后用 $\sum a^2(b^2-c^2)^2$ 收尾.

$$8s(a^2)^3-9p(a+b)s(a^3)-9/2s(a(a-b)(a-c))^2-7/4s(a)^2s((a-b)^2(a+b-2c)^2)-4s(a^4(b-c)^2)-25/2p(a-b)^2-7/4s(a^2(b-c)^4)-5/4s(a^2(b^2-c^2)^2)$$

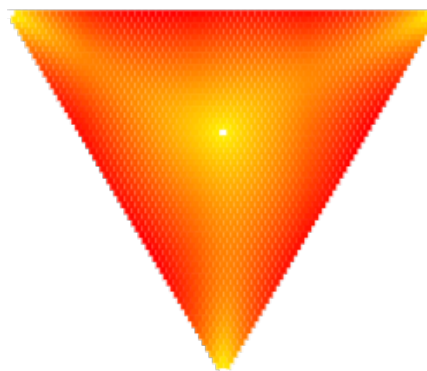
16.22 33 不等式

$$3p(a^{11}+b^{11})-2s(ab^{10}(b^{11}+c^{11})(c^{11}+a^{11}))$$



次数降低后: $3p(a_3+b_3)-2s(ab_2(b_3+c_3)(c_3+a_3))$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 6 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



16.23 jichen

求证 $\left(\sum a^2\right)^3 \geq 27 \prod (2a^2 - bc)$

$$\begin{aligned} & \left(\sum a^2\right)^3 - 27 \prod (2a^2 - bc) \\ &= \frac{1}{2} \sum (a^2 + 5bc) \sum (a-b)^2 (a+b-5c)^2 + \sum (a^2b^2 + 2c^4 + 5abc(a+b+c))(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$s(a^2)^3 - 27p(2a^2 - bc) - 1/2s(a^2 + 5bc)s((a-b)^2(a+b-5c)^2) - s(0(a^2b^2 + 2c^4)(a-b)^2) =$$

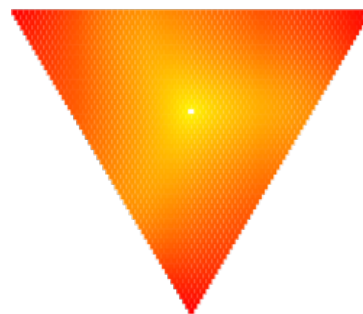
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -30 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16.24

非负实数 $a + b + c = 3$, 求证 $\sum \frac{ab^2}{1 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{3}{4}$. 贴吧链接

$$s(a)p(s(a)^2 + 18b^2 + 9c^2) - 36s(ab^2(s(a)^2 + 18c^2 + 9a^2)(s(a)^2 + 18a^2 + 9b^2))$$

$$\begin{bmatrix} 190 & 628 & -2553 & 3131 & -667 & 2037 & 268 & 190 \\ & 268 & 762 & -2955 & 806 & 2931 & 762 & 628 \\ & & 2037 & 2931 & -4578 & -4578 & -2955 & -2553 \\ & & & -667 & 806 & -4578 & 806 & 3131 \\ & & & & 3131 & -2955 & 2931 & -667 \\ & & & & & -2553 & 762 & 2037 \\ & & & & & & 628 & 268 \\ & & & & & & & 190 \end{bmatrix}$$

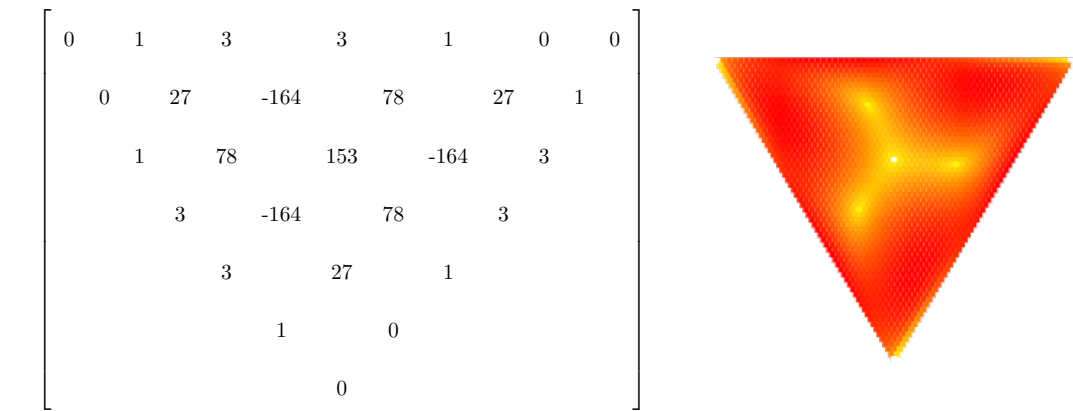


$$s(a)p(s(a)^2+18b^2+9c^2)-36s(ab^2(s(a)^2+18c^2+9a^2)(s(a)^2+18a^2+9b^2))-s(a^4b(25a-55b+30c)^2)-s(a^2b^3(10a-45b+35c)^2)-190s(a^3(a^2-bc)^2)-179s(a^4c(a-b)^2)=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 197 & 6 & 233 & 12 & 89 & 0 \\ & 89 & 0 & 166 & 106 & 5181 & 0 & 3 \\ & & 12 & 5181 & -5993 & -5993 & 166 & 197 \\ & & & 233 & 106 & -5993 & 106 & 6 \\ & & & & 6 & 166 & 5181 & 233 \\ & & & & & 197 & 0 & 12 \\ & & & & & & 3 & 89 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

16.25 复杂取等

$$24abcs(a)^3+s(a^2b)s(a)^3-243abcs(a^2b) =$$



有非平凡取等对应的二次元 $(a^2 - b^2 + (3\sqrt{3} - 4)(ab - ac) + 2(bc - ab))$ 贴吧 贴吧类似