

韦东奕不等式的粗略研究

已知 $a, b, c > 0$, 那么

$$(1-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2 \geq \frac{c^2(1-a^2)(1-b^2)}{(ab+c)^2} + \frac{b^2(1-a^2)(1-c^2)}{(ac+b)^2} + \frac{a^2(1-b^2)(1-c^2)}{(bc+a)^2}$$

当 $a = b = c$ 时, 等号成立。据说是韦东奕在研究 Jacobi 椭圆函数时得到的副产物。聂子佩、李心宇、陈计等人的证法附在末尾。现尝试直接对其通分, 将分子看作关于 a 的多项式, 分析多项式系数的正负性。以下 $p_k (k = 0, 1, 2, \dots, 8)$ 代表 a^k 的系数,

$$\begin{aligned} p_8 &= b^2 c^2 \\ p_7 &= 2bc(b^2 c^2 + b^2 - bc + c^2) \\ p_6 &= 5b^4 c^2 + 2b^4 - 4b^3 c^3 - 2b^3 c^2 - 4b^3 c + 5b^2 c^4 - 2b^2 c^3 + 6b^2 c^2 - 4bc^3 + 2c^4 \\ p_5 &= 2(4b^5 c - b^4 c^4 - 2b^4 c^3 - 4b^4 c^2 - 2b^4 c - b^4 - 2b^3 c^4 + 9b^3 c^3 - 2b^3 c^2 + 4b^3 c \\ &\quad - 4b^2 c^4 - 2b^2 c^3 - 4b^2 c^2 + 4bc^5 - 2bc^4 + 4bc^3 - c^4) \\ p_4 &= 5b^6 c^2 + 2b^6 - 2b^5 c^4 - 4b^5 c^3 - 8b^5 c^2 - 4b^5 c - 2b^5 - 2b^4 c^5 + 3b^4 c^4 - 8b^4 c^3 \\ &\quad + 30b^4 c^2 - 2b^4 c + b^4 - 4b^3 c^5 - 8b^3 c^4 - 16b^3 c^3 - 8b^3 c^2 - 4b^3 c + 5b^2 c^6 - 8b^2 c^5 \\ &\quad + 30b^2 c^4 - 8b^2 c^3 + 11b^2 c^2 - 4bc^5 - 2bc^4 - 4bc^3 + 2c^6 - 2c^5 + c^4 \\ p_3 &= 2bc(b^6 c^2 + b^6 - 2b^5 c^2 - b^5 c - 2b^5 - 2b^4 c^3 + 9b^4 c^2 - 2b^4 c + 4b^4 - 2b^3 c^4 \\ &\quad - 4b^3 c^3 - 8b^3 c^2 - 4b^3 c - 2b^3 + b^2 c^6 - 2b^2 c^5 + 9b^2 c^4 - 8b^2 c^3 + 21b^2 c^2 \\ &\quad - 2b^2 c + b^2 - bc^5 - 2bc^4 - 4bc^3 - 2bc^2 - bc + c^6 - 2c^5 + 4c^4 - 2c^3 + c^2) \\ p_2 &= b^2 c^2 (b^6 - 2b^5 + 5b^4 c^2 - 2b^4 c + 6b^4 - 8b^3 c^2 - 4b^3 c - 8b^3 + 5b^2 c^4 - 8b^2 c^3 + 30b^2 c^2 \\ &\quad - 8b^2 c + 11b^2 - 2bc^4 - 4bc^3 - 8bc^2 - 4bc - 2b + c^6 - 2c^5 + 6c^4 - 8c^3 + 11c^2 - 2c) \\ p_1 &= 2b^3 c^3 (b^4 - 2b^3 + 4b^2 c^2 - 2b^2 c + 4b^2 - 2bc^2 - bc - 2b + c^4 - 2c^3 + 4c^2 - 2c + 1) \\ p_0 &= b^4 c^4 (2b^2 - 2b + 2c^2 - 2c + 1) \end{aligned}$$

容易看出,

$$\begin{aligned} p_8 &> 0 \\ p_7 &= 2bc[b^2 c^2 + (b-c)^2 + bc] > 0 \\ p_0 &= b^2 c^4 [2(b - \frac{1}{2})^2 + 2(c - \frac{1}{2})^2] \geq 0 \end{aligned}$$

其它的系数过于复杂, 不太容易看出配方的结果, 直接画出这些二元函数的曲面观察, 发现 p_3, p_4, p_5 正负性不确定, p_8, p_7 为正数, p_1 有正的极小值, p_2 有负的极小值, $p_6 \geq 0$.